Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 5:
Systeme mit mehrfachen Eigenwerten, inhomogene Probleme

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Lineare Systeme mit mehrfachen Eigenwerten

Wiederholung: Eigenwert-Eigenvektor-Lösungen

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Wir betrachten das lineare, homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung $u' = Au$. Es seien

- $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A (komplex oder reell),
- $v^{[1]}, \cdots, v^{[m]}$ die zugehörigen Eigenvektoren (diese sind linear unabhängig). Das ist die Eigenschaft, die wir hauptsächlich brauchen.

Dann gilt: Die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t} v^{[1]}, \cdots, e^{\lambda_m t} v^{[m]}$$

bilden ein Fundamentalsystem.

Frage: Was passiert, wenn Eigenwerte mehrfach auftauchen und wir nicht m paarweise verschiedene Eigenwerte haben?

Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und λ_k ein Eigenwert von A, d.h. eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Mit welche Potenz taucht $(\lambda - \lambda_k)$ in $p(\lambda)$ auf?

Wir sagen, λ_k hat

- die **algebraische Vielfachheit** $\alpha = \alpha(\lambda_k)$, $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$, wenn es ein Polynom q mit $\deg(q) = m - \alpha$ gibt, für das gilt

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^\alpha q(\lambda), \qquad q(\lambda_k) \neq 0;$$

- die **geometrische Vielfachheit** $\gamma = \gamma(\lambda_k)$, wenn der zugehörige Eigenraum die Dimension γ hat, d.h.

$$\gamma(\lambda_k) = \dim(E(\lambda_k)), \qquad E(\lambda_k) = \ker(A - \lambda_k I).$$

Es gilt $\gamma(\lambda_k) = m - \operatorname{rang}(A - \lambda_k I)$.

Falls $\alpha(\lambda_k) = \gamma(\lambda_k)$ haben wir kein Problem.

Für $\alpha(\lambda_k) = \gamma(\lambda_k) = d$ finden wir d linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_k,

$$v^{[k]},\ v^{[k+1]}, \cdots, v^{[k+d-1]}$$

und erhalten die d linear unabhängigen Basislösungen

$$e^{\lambda_k t} \underline{v^{[k]}},\ e^{\lambda_k t} \underline{v^{[k+1]}}, \cdots, e^{\lambda_k t} \underline{v^{[k+d-1]}}.$$

Wir haben überall den selben Exponenten, aber das ist kein Problem, so lange die $v^{[j]}$ linear unabh. sind.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \end{array} = (2-\lambda) \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \det \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - \left((2-\lambda) - 1\right) - \left(-1 + (2-\lambda)\right)$$

$$= (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) + 2$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 3\lambda + 2$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

Eigenwerte: $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

Summe der Koeff. = 0
$\Rightarrow \lambda = 1$ ist NST

$\lambda_1 = 1$ ist EW $\longrightarrow$ Spalte $(\lambda - 1)$ ab

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4)$$

$$
\begin{array}{l}
-\lambda^3 + \lambda^2 \\
\hline
5\lambda^2 - 9\lambda \\
5\lambda^2 - 5\lambda \\
\hline
-4\lambda + 4 \\
-4\lambda + 4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Weitere NST: $-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$

$= +\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 4$

Zusammen: $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$

$\longrightarrow \lambda_{1,2} = 1$ ist EW mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(\lambda_{1,2}) = 2$

Eigenraum zu $\lambda_{1,2}$: Löse $(A-\lambda_1 I)v=0$ durch Gauß-Elimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(III)+(I)]{(II)-(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rang}(A-I) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(A-I)) = 3-1 = 2 = \gamma(\lambda_{1,2})$

$\longrightarrow$ Es gilt $\alpha(\lambda_{1,2}) = \gamma(\lambda_{1,2}) = 2$ und wir finden zwei linear unabh. Eigenvektoren.

Es soll gelten: $\underline{v_1 + v_2 - v_3 = 0.}$

Wähle z.B. $v^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenraum zu λ_3: $(A-4I)v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2(III)-(I)]{2(II)+(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}\cdot(II)]{(III)-(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus (II): $v_2 = -v_3$

Aus (I): $-2v_1 + v_2 - v_3 = -2v_1 - 2v_3 = 0$

$\Rightarrow v_1 = -v_3.$

Wähle $v_3 = 1$. Damit: $v^{[3]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem für $u' = Au$: $\left\{ e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Falls $\alpha(\lambda_k) > \gamma(\lambda_k)$, brauchen wir **Hauptvektoren**.

Sei λ ein Eigenwert von A mit $\alpha(\lambda) > \gamma(\lambda)$, sowie v ein zugehöriger Eigenvektor.

Ein **Hauptvektor der zweiten Stufe** zu λ ist ein Vektor w mit

$$(A - \lambda I)^2 w = 0, \qquad \underline{(A - \lambda I) w \neq 0}.$$

Wir können w als Lösung von

Das ist die Bedingung, mit der wir rechnen. →

$$\underline{(A - \lambda I) w = v \quad \neq 0}$$

Da v EV nach Def. nicht Null ist.

$\Rightarrow (A - \lambda I)^2 w = (A - \lambda I) v = 0$, da v EV zu λ.

finden.

Dann sind

$$e^{\lambda t} v, \qquad e^{\lambda t}(w + tv)$$

linear unabhängige Lösungen von $u' = Au$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ ist EW mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(\lambda_{1,2}) = 2$.

Eigenvektor: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(II) - \frac{1}{2}(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

wähle $v^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es ist $\text{Rang}(A-I) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(A-I)) = 2-1 = 1 = \gamma(\lambda_{1,2})$

D.h. $\alpha(\lambda_{1,2}) > \gamma(\lambda_{1,2}) \longrightarrow$ Wir brauchen einen Hauptvektor!

Hauptvektor der zweiten Stufe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot v^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1^{[2]} - 2v_2^{[2]} = 1$$

wähle z.B. $v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fundamentalsystem für $u' = Au$:

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+2t)e^t \\ t\,e^t \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Inhomogene Probleme und die Variation der Konstanten

Für **inhomogene, lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten** können ähnlich wie im skalaren Fall vorgehen.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $b : I \to \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir betrachten

$$u'(t) = Au(t) + b(t), \qquad t \in I.$$

Wir gehen wie üblich vor:

Das können wir jetzt.

1. Bestimme die allgemeine Lösung u_h des homogenen Problems.
2. Bestimme *eine* partikuläre Lösung u_p des inhomogenen Problems.
3. Erhalte die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems als $u = u_h + u_p$.

Das lernen wir gleich.

Die partikuläre Lösung finden wir durch **Variation der Konstanten**.

Allgemeine Lösung des homogenen Problem $u' = Au$: $\quad u(t) = W(t)c$
mit einer Fundamentalmatrix $W(t)$ und einer Konstanten $c = (c_1, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

$W(t) = \left(e^{\lambda_1} v^{[1]} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, e^{\lambda_n} v^{[n]} \right)$

Einzelne Spalten

Ansatz: $\quad u_p(t) = W(t)k(t) \quad$ mit einer zu bestimmenden Funktion $k : I \to \mathbb{R}^n$.

Damit gilt: $\quad u_p'(t) = W'(t)k(t) + W(t)k'(t)$. (Produktregel)

Da W eine Fundamentalmatrix ist, gilt $\quad W'(t) = AW(t)$. ← Alle Spalten von W sind Lösungen der DGL.
Daraus folgt

$$u_p'(t) = \cancel{A\overset{W(t)}{W}}k(t) + \underline{W(t)k'(t)} \overset{!}{=} Au_p(t) + b(t) = \cancel{AW(t)}k(t) + \underline{b(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{W(t)k'(t) = b(t)} \quad \left(\Rightarrow \quad k'(t) = W^{-1}(t)b(t). \right)$$

Damit rechnen wir!

Beispiel: $u' = Au + b, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

Haben wir oben schon bestimmt:

$$W(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & (1+2t)e^t \\ e^t & t\,e^t \end{pmatrix}.$$

Beachte: Hier hat die Inhomogenität die Form $e^{\mu t}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $\mu = 1$ <u>ist</u> EW von A.

Variation der Konstanten: Löse $W(t)k'(t) = b(t)$:

$$\begin{pmatrix} 2e^t & (1+2t)e^t \\ e^t & t\,e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (I) & 2e^t k_1'(t) + (1+2t)e^t k_2'(t) = e^t \\ (II) & e^t k_1'(t) + t e^t k_2'(t) = e^t \end{cases}$$

$\underline{(II)-(I):}$ $e^t k_2'(t) = -e^t \Rightarrow \underline{k_2'(t) = -1} \Rightarrow \boxed{k_2(t) = -t}$

$\underline{\text{In } (I):}$ $2\cancel{e^t} k_1'(t) - (1+2t)\cancel{e^t} = \cancel{e^t}\,1 \Rightarrow k_1'(t) = \frac{1}{2}(2+2t) = 1+t$

$\Rightarrow \boxed{k_1(t) = t + \frac{1}{2}t^2.}$

Damit:

$$u_p(t) = k_1(t)e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2(t)e^t\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}t^2+t\right)e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - te^t\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} t^2+2t-2t^2-t \\ \frac{1}{2}t^2+t-t^2 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -t^2+t \\ -\frac{1}{2}t^2+t \end{pmatrix}.$$

Manchmal können wir die partikuläre Lösung durch einen **speziellen Ansatz** finden.

- Falls $b(t) = (b_0 + tb_1 + \cdots + t^k b_k)e^{\mu t}$ mit gegeben Vektoren $b_0, \ldots, b_k$, und μ **kein Eigenwert** von A ist:

  $$u_p(t) = (c_0 + tc_1 + \cdots + t^k c_k)e^{\mu t} \quad \text{mit zu bestimmenden} \quad c_0, \ldots, c_k.$$

  Insbesondere (für $\mu = 0$): Ist die Inhomogenität ein Polynom, setzten wir ein Polynom vom selben Grad an.

- Falls
  $b(t) = (a_0 + ta_1 + \cdots + t^k a_k)\cos(\omega t) + (b_0 + tb_1 + \cdots + t^k b_k)\sin(\omega t)$
  mit gegeben Vektoren $a_0, \ldots, a_k$ und $b_0, \ldots, b_k$, und $i\omega$ **kein Eigenwert** von A ist:

  $$u_p(t) = (c_0 + tc_1 + \cdots + t^k c_k)\cos(\omega t) + (d_0 + td_1 + \cdots + t^k d_k)\sin(\omega t)$$

  mit zu bestimmenden $c_0, \ldots, c_k$ und $c_0, \ldots, c_k$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} -4t+12 \\ 4t+4 \end{pmatrix}.$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 4$,

Eigenvektoren: $v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

$$w_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2(t) = \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz für u_p: $u_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 t \\ c_2 + d_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} -4t & +12 \\ 4t & +4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u_p'(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

Ansatz in Gleichung einsetzen:

$$A u_p(t) + b(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3c_1 + 4c_2 + 12 \\ c_1 + 4 \end{pmatrix}}_{\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 3d_1 + 4d_2 - 4 \\ d_1 + 4 \end{pmatrix}}_{\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\stackrel{!}{=} u_p'(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$ $\leftarrow$ kein zeitabh. Anteil vorhanden.

Wir erhalten vier Bedingungen für die Unbekannte c_1, c_2, d_1, d_2:

$(1)\quad d_1 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{d_1 = -4}$

$(2)\quad 3d_1 + 4d_2 - 4 = 0 \Rightarrow -12 + 4d_2 - 4 = 0 \Rightarrow 4d_2 = 16$

$\Rightarrow \underline{d_2 = 4}.$

$(3)\quad c_1 + 4 = d_2 = 4 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$

$(4)\quad 3c_1 + 4c_2 + 12 = d_1 \Rightarrow 4c_2 + 12 = -4 \Rightarrow 4c_2 = -16$

$\Rightarrow \underline{c_2 = -4}$

$$\Rightarrow u_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4t \\ 4t - 4 \end{pmatrix}.$$

Wir können das Problem auch über Variation der Konstanten lösen:

↪ Sollten wir aber nicht. Ist sehr aufwändig.

Fundamentalsystem: $W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 4e^{4t} \\ -e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}$. Löse $W k' = b$:

$$\text{(I)} \quad e^{-t} k_1'(t) + 4e^{4t} k_2'(t) = -4t + 12$$

$$\text{(II)} \quad -e^{-t} k_1'(t) + e^{4t} k_2'(t) = 4t + 4$$

Analytisch gar kein Problem, aber unhandlich.

$$\text{(I)}+\text{(II)}: \quad 5e^{4t} k_2'(t) = 16 \Rightarrow k_2'(t) = \frac{16}{5} e^{-4t} \Rightarrow k_2(t) = -\frac{4}{5} e^{-4t}$$

In (I): $e^{-t} K_1'(t) + 4e^{4t} K_2'(t) = -4t + 12$

$$\Rightarrow e^{-t} K_1'(t) + 4e^{4t}\left(\frac{16}{5} e^{-4t}\right) = -4t + 12$$

$$\Rightarrow e^{-t} K_1'(t) = -\frac{20}{5}t + \frac{60}{5} - \frac{64}{5} = -\frac{1}{5}(20t + 4)$$

$$\Rightarrow K_1'(t) = -\frac{1}{5}(20t + 4)e^{t} \Rightarrow K_1(t) = -\frac{1}{5}(20(t-1) + 4)e^{t}$$

$$= -\frac{1}{5}(20t - 16)e^{t}$$

Damit:

$$u_p(t) = -\frac{1}{5}(20t - 16)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} - \frac{4}{5}e^{-4t}\begin{pmatrix} 4e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 - 20t - 16 \\ 20t - 16 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t \\ 4t - 4 \end{pmatrix}.$$

$\longrightarrow$ Das geht also, ist aber viel Arbeit.

Wir sollten die Struktur der Inhomogenität ausnutzen, wenn es geht!

<u>**Beispiel:**</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \sin(2t) \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \end{pmatrix}.$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$, Eigenvektoren: $v^{[1,2]} = \begin{pmatrix} 1 \pm \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}$

Reelles Fundamentalsystem:

$$w_1(t) = \cancel{e^{-2t}} \left[\sin(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right],$$

$$w_2(t) = \cancel{e^{-2t}} \left[\sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \sin(2t) \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Ansatz für u_p: $\quad u_p(t) = \sin(2t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \cos(2t)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad u_p'(t) = \cos(2t)\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix} -2d_1 \\ -2d_2 \end{pmatrix}$$

$$Au_p(t) + b(t) = \sin(2t)\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 15 \\ -2c_1 - c_2 - 30 \end{pmatrix}}_{\overset{!}{=}\begin{pmatrix} -2d_1 \\ -2d_2 \end{pmatrix}} + \cos(2t)\underbrace{\begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ -2d_1 - d_2 \end{pmatrix}}_{\overset{!}{=}\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{!}{=} u_p'(t)$$

Beachte: Auch wenn b nur einen sin-Term enthält, brauchen wir im Ansatz für u_p sowohl sin, als cos.

Bedingungen:

(1) $c_1 + c_2 + 15 = -2d_1$

(2) $-2c_1 - c_2 - 30 = -2d_2$

(3) $d_1 + d_2 = 2c_1$

(4) $-2d_1 - d_2 = 2c_2$

Als System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$u_p(t) = \sin(2t) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Prinzipiell können wir somit auch inhomogene Probleme für skalare lineare Gleichungen höherer Ordnung lösen

Man kann hier auch anders vorgehen, aber die Methode von eben lässt sich direkt übertragen

Beispiel: $u''' + u'' = 2te^t$

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1)$.

Allgemeine Lösung des homogenen Problems: $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$

$\lambda = 0$ doppelte NST

Gleichung als System erster Ordnung: Mit $u_0 = u,\ u_1 = u',\ u_2 = u''$:

Vergl. HA 4, Aufgabe 2.

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2te^t \end{pmatrix}.$$

Fundamentalmatrix für dieses System: $W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & e^{-t} \\ 0 & 1 & -e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$

Fundamental sys.

erste Ableitung

zweite Ableitung

Variation der Konstanten: $u_p = W(t)k(t)$, und

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 1 & -\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \\ k_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

$$(\mathrm{III}): \; e^{-t} k_3'(t) = 2te^{t} \Rightarrow k_3'(t) = 2t e^{2t}$$

Part. Integ.

$$\Rightarrow k_3(t) = \int 2te^{2t}\,dt = te^{2t} - \int e^{2t}\,dt = \left(t - \tfrac{1}{2}\right)e^{2t}$$

$$(\mathrm{II}): \; k_2'(t) - e^{-t} k_3'(t) = k_2'(t) - e^{-t}\left(2te^{2t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow k_2'(t) = 2te^{t} \Rightarrow k_2(t) = 2(t-1)e^{t}.$$

(I): $k_1'(t) + t\,k_2'(t) + e^{-t}k_3'(t)$

$= k_1'(t) + 2te^{2t} + 2te^{t} = 2(t^2+t)e^{t} = 0$

$\Longrightarrow k_1'(t) = -2(t^2+t)e^{t} \overset{\text{Part. Int.}}{\Longrightarrow} \dots \Longrightarrow \underline{k_1(t) = -2(t^2-t+1)e^{t}}$

Hier: Nur erste Komponente der Lösung:

$$u_p(t) = k_1(t) + k_2(t)\,t + k_3(t)\,e^{-t}$$

$$= -2(t^2-t+1)e^{t} + t(2t-2)e^{t} + e^{-t}\left(t-\tfrac{1}{2}\right)e^{2t}$$

$$= e^{t}\left(\cancel{-2t^2} + \cancel{2t} - 2 + \cancel{2t^2} - \cancel{2t} + t - \tfrac{1}{2}\right) = \left(t-\tfrac{5}{2}\right)e^{t}.$$