Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1 für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 4: Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Skalare Probleme höherer Ordnung

Hilfsmittel für die Klausur:

4 Seiten (= 2 Blätter DIN-A4) Notizen

(+ 4 Seiten für Analysis 3)

Wie betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung der **Ordnung** m mit **konstanten Koeffizienten**:

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

mit gegebenen konstanten $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$.

Ansatz: $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow u'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \ldots, u^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$

In der DGL:

$$a_m \lambda^m \cancel{\mathrm{e}^{\lambda t}} + a_{m-1} \lambda^{m-1} \cancel{\mathrm{e}^{\lambda t}} + \cdots + a_1 \lambda \cancel{\mathrm{e}^{\lambda t}} + a_0 \cancel{\mathrm{e}^{\lambda t}} = 0.$$

Wegen $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ folgt:

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Wir können die Lösungen über das **charakteristische Polynom** finden.

Zur linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0 \qquad (*)$$

mit $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$, heißt

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$$ das **charakteristische Polynom** der Gleichung $(*)$.

Zu jeder Nullstelle λ_* von p ist $v(t) := \mathrm{e}^{\lambda_* t}$ eine Lösung von $(*)$.

Die Menge aller $\mathscr{C}^m$-Funktionen, die die Gleichung $(*)$ lösen, bildet einen Vektorraum der Dimension m ($\longrightarrow$ der **Lösungsraum**).

Ist eine Menge M von Funktionen ein Basis des Lösungsraums, nennen wir M ein **Fundamentalsystem** von $(*)$.

Beispiel: Sind $\lambda_0, \ldots \lambda_m$ paarweise verschiedene Nullstellen von p, so ist

$$M := \left\{ v_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} : 1 \leq k \leq m \right\}$$

eine linear unabhängige Menge von Lösungen der Gleichung $(*)$. Da der Lösungsraum die Dimension m hat und M linear unabhängig ist, ist M ein Fundamentalsystem. Jede Lösung u von $(*)$ hat also in diesem Fall die Form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k v_k(t), \qquad c_k \in \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq m.$$

Falls $\sum_{k=1}^{m} c_k v_k(t) = 0$ für alle t, folgt $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Beispiel: $u''' - 6u'' + 11u' - 6u = 0$

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

Summe der Koeffizienten $= 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ist Nullstelle

Polynomdivision:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)\cdot(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ -5\lambda^2 + 11\lambda \\ \underline{-5\lambda^2 + 5\lambda} \\ 6\lambda - 6 \\ \underline{6\lambda - 6} \\ 0 \end{array}$$

Weitere NST: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

Fundamentalsystem: $M = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$.

Allg. Lösung: $u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$,

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Beispiel: $u'''' - 5u'' + 4u = 0$ $\quad (u^{(4)})$

Char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^4 + 0\cdot\lambda^3 - 5\lambda^2 + 0\cdot\lambda + 4$

Setze $\mu := \lambda^2$. NST: $\mu^2 - 5\mu + 4 = 0$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -2$$

Fundamentalsystem: $\mathcal{U} = \{e^{-2t}, e^{-t}, e^{t}, e^{2t}\}$

Allg. Lösung: $u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{t} + c_4 e^{2t}$

$c_k \in \mathbb{R}$.

Was passiert bei **mehrfachen Nullstellen**?

Ist λ ein Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit d, so sind

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t}, \cdots, t^{d-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen.

Beispiel: $u'''' - u''' = 0.$ Char. Poly.: $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ ist NST mit Vielfachheit $d = 3$

Fundamentalsystem: $M = \{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$

$= \{1, t, t^2, e^t\}$

Dass hier kein $e^{\lambda t}$ mehr steht, liegt daran, dass $\lambda_1 = 0$. Nicht daran, dass λ_1 Vielfachheit $d > 1$ hat!

Was passiert bei **komplexen Nullstellen**?

Komplexe Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten treten immer als komplex konjugierte Paare auf, d.h.

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\bar{\lambda}) = 0.$$

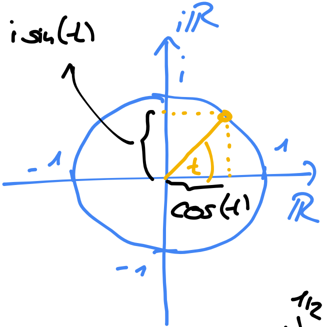
Wir haben die linear unabhängigen komplexen Lösungen $\mathrm{e}^{\lambda t}, \; \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}$.

Aber wir hätten gerne reelle Lösungen!

Wir können komplexe Lösungen $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ zulassen. Aber auch für gänzlich reelle Anwendungen brauchen wir manchmal den Umweg über komplexe λ.

Wir brauchen die **Eulersche Formel**.

Die komplexe Exponentialfunktion e^{it} hat die Darstellung



$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Re}(e^{it}) = \cos(t)$, $\operatorname{Im}(e^{it}) = \sin(t)$.

$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a - ib,\ |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Mit $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, gilt dann

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot (\cos(bt) + i\sin(bt)),$$
$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{(a-ib)t} = e^{at} \cdot (\cos(bt) - i\sin(bt)).$$

$$|e^{it}| = (e^{it} \cdot e^{-it})^{1/2} = (e^0)^{1/2} = 1.$$

$\cos(-bt) = \cos(bt)$

$\sin(-bt) = -\sin(bt).$

Damit folgt

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\bar{\lambda} t}\right) = e^{at}\cos(bt)$$
$$\operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\right) = -\operatorname{Im}\left(e^{\bar{\lambda} t}\right) = e^{at}\sin(bt).$$

Daraus erhalten wir reelle linear unabhängige Lösungen.

Die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}$ sind Lösungen der linearen homogenen Gleichung

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}\right)$ ist eine Lösung und $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}\right)$ ist eine Lösung.

Es gilt

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}\right) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt), \qquad \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}\right) = \mathrm{e}^{at}\sin(bt).$$

Mit $b \neq 0$ sind die Funktionen $\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$, $\mathrm{e}^{at}\sin(bt)$ linear unabhängig.

Wir üben später noch, wie man testen kann, ob Funktionen linear unabhängig sind.

Beispiel: $u''' + u'' - 2u = 0$ Char. Poly.: $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2$

NST: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1+i, \quad \lambda_2 = -1-i$

$a = 1, \; b = 1$

Komplexes Fundamentalsystem:

$$\tilde{M} = \{ e^t, e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t} \}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$M = \{ e^t, e^{at}\cos(bt), e^{at}\sin(bt) \} = \{ e^t, e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t) \}.$$

Wie können wir sehen, ob eine Menge ein Fundamentalsystem ist?

Ein Fundamentalsystem M für

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0 \qquad (\bigstar)$$

ist eine Basis des zugehörigen Lösungsraums. Daher gilt:

Für Fundamentalsysteme allgemein:

- Alle Elemente von M sind Lösungen von ($\bigstar$).
- M ist linear unabhängig.
- M hat m Elemente.

Für Fundamentalsysteme aus exponentiellen Lösungen weiterhin:

- Komplexe Exponenten treten nur paarweise komplex konjugiert auf:
  $\mathrm{e}^{\lambda t} \in M \Rightarrow \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t} \in M$.

Beispiel:: $u^{(4)}(t) + a_3 u'''(t) + a_2 u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$
$a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Mengen von Funktionen, kann (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein? → Kein Fundamentalsystem

(a) $M_1 := \{u_1(t) = 1,\ u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ u_3(t) = \mathrm{e}^{5t},\ u_4(t) = t^4\}$

t^4 würde (mit $1, t, t^2, t^3$) auftauchen, wenn $\lambda = 0$ fünffache NST wäre.

(b) $M_2 := \{u_1(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ u_2(t) = \mathrm{e}^{-t},\ u_3(t) = \mathrm{e}^{t},\ u_4(t) = \mathrm{e}^{2t},\ u_5(t) = \mathrm{e}^{3t}\}$

$n = 4$, aber M_2 hat 5 Elemente → kein Fundamentalsys.

(c) $M_3 := \{u_1(t) = \underline{\mathrm{e}^{-t}},\ u_2(t) = e^{\underline{-\mathrm{i}t}},\ u_3(t) = \mathrm{e}^{\underline{\mathrm{i}t}},\ u_4 = \underline{\mathrm{e}^{8t}}\}$.

↳ 4 linear unabh. Elemente, komplexe Exponenten paarweise konjugiert → Ist Fundamentalsystem für geeignete $a_0, \ldots, a_3$.

2. Lineare Systeme erster Ordnung

Wir betrachten ein **System erster Ordnung**:

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= a_{1,1}u_1(t) + a_{1,2}u_2(t) + \cdots + a_{1,m}u_m(t)\\
u_2'(t) &= a_{2,1}u_1(t) + a_{2,2}u_2(t) + \cdots + a_{2,m}u_m(t)\\
&\vdots\\
u_m'(t) &= a_{m,1}u_1(t) + a_{m,2}u_2(t) + \cdots + a_{m,m}u_m(t)
\end{aligned}
$$

Für $I \subset \mathbb{R}$, und $u_1, \ldots, u_m : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar schreiben wir:

$$
u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \qquad u'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$: $(m \times m)$-Matrix mit Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ $1 \leq i, j \leq m$.
Dann hat das System die Form

$$
u' = Au.
$$

Für die Lösung brauchen wir **Eigenwerte und Eigenvektoren**.

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Angenommen, $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ ist eine Lösung von $u' = Au$. Dann gilt:

$$u'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} v = A \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda t} v\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda v = Av.$$

Also ist λ Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor v.

→ Die Eigen-Struktur des Systems sagt uns alles, was wir wissen müssen!

Ein bisschen lineare Algebra:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine $(m\times m)$-Matrix mit m paarweise verschiedenen (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Dann die zugehörigen Eigenvektoren $v^{[1]}, \dots, v^{[m]}$ linear unabhängig (in $\mathbb{R}^m$) und die Funktionen

$$w_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v^{[1]}, \quad \cdots, \quad w_m(t) = \mathrm{e}^{\lambda_m t} v^{[m]}$$

sind linear unabhängig (in $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$).

Beispiel: :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad u' = Au.$$

Eigenwerte: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) + 36$$

$$= \dots = (\lambda+5)(\lambda-10)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 10$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch $(A - \lambda I)v = 0$: $v^{[1]} = \begin{pmatrix} v_1^{[1]} \\ v_2^{[1]} \end{pmatrix}$

zu $\lambda_1 = -5$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(II) + \frac{1}{2}(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 12 v_1^{[1]} - 6 v_2^{[1]} = 0$$

$$\Rightarrow 2 v_1^{[1]} = v_2^{[1]}$$

Wähle $v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Analog: $v^{[2]} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$w_1(t) = e^{\lambda_1} v^{[1]} = e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad w_2(t) = e^{\lambda_2} v^{[2]} = e^{10t}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix: $W(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} & -2e^{10t} \\ 2e^{-5t} & e^{10t} \end{pmatrix}$

Allg. Lösung: $u(t) = W(t)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t)$

$$= c_1 e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{10t}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Was passiert bei **komplexen Eigenwerten**?

Fast so wie eben: Bei Matrizen mit reellen Einträgen tauchen komplexe Eigenwerte im als komplex konjugierte Paare auf:

$$\begin{array}{llll} \lambda & \text{ist Eigenwert von} & A \in \mathbb{R}^{n\times n} & \text{mit Eigenvektor} \quad v \\ & & \Leftrightarrow & \\ \bar{\lambda} & \text{ist Eigenwert von} & A \in \mathbb{R}^{n\times n} & \text{mit Eigenvektor} \quad \bar{v} \end{array}$$

Zwei linear unabhängige komplexe Lösungen: $\mathrm{e}^{\lambda t} v, \quad \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$

Zwei linear unabhängige reelle Lösungen: $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} v\right), \quad \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} v\right).$

Beispiel: :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u' = Au.$$

Eigenwerte: $0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2$

$= \lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = i$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ -2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)+(1+i)(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left[(1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1-(-1) = 2 \right]$$

$$\Rightarrow (1-i)\, v_1^{[1]} = -v_2^{[1]}$$

Wähle $v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$:

$$u(t) = d_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} + d_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 t} v^{[1]}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$e^{\lambda_1 t} v^{[1]} = e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = \left(\cos(t) + i \sin(t)\right) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$$

Allg. reelle Lösung: $u(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Offene Fragen nächstes Mal

Was passiert bei mehrfachen Eigenwerten?

Können wir inhomogene Probleme lösen?

$u = u_h + u_p$ mit

u_h: Lösung des homogenen Problems
($\to$ können wir jetzt in vielen Fällen)

u_p: <u>Eine</u> partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Wir können skalare Gleichungen höherer Ordnung in Systeme erster Ordnung umschreiben.

Beispiel:: $u''' + 7u'' + 7u' - 15u = 0$ $\Rightarrow$ $u''' = 15u - 7u'' - 7u'$

Definiere: $u_0 = u, \quad u_1 = u', \quad u_2 = u''$

Damit: $u_0' = u_1, \quad u_1' = u_2, \quad u_2' = 15u_0 - 7u_2 - 7u_1$

Im Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$