Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 3:

Ähnlichkeits-, Riccati- und Euler-DGLn,
exakte Differentialgleichungen, der integrierende Faktor

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Lösung durch Substitution oder Variablentransformation

Ziel: "komplizierte" Gleichungen auf bekannte Gleichungen zurückführen.

Ähnlichkeits-DGLn können auf **separierbare DGLn** zurückgeführt werden.

Ähnlichkeits-DGL: $u'(t) = f\left(\frac{u(t)}{t}\right), \qquad t > 0.$

Substitution: $y(t) := \frac{u(t)}{t}$ Produktregel

Damit gilt: $u(t) = ty(t) \Rightarrow u'(t) = y(t) + ty'(t)$

Transformierte DGL:

$$u'(t) = y(t) + ty'(t) = f(y(t))$$

$$\Rightarrow y'(t) = \underbrace{\left(f(y(t)) - y(t)\right)}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{h(t)}$$

Rücksubstitution: $\cancel{u(t)} =$

$$u(t) = t \cdot y(t)$$

Ähnlichkeits-DGLn können auf **separierbare DGLn** zurückgeführt werden.

HA3, A1

Beispiel: $u'(t) = \frac{t+2u(t)}{t} = 1 + 2\frac{u(t)}{t}$

Mit $y = \frac{u}{t}$, $f(y) = 1+2y$

$(f(y)-y)$

Transformierte DGL: $y'(t) = (1+y)\cdot\frac{1}{t}$. Für $y \neq -1$:

Trennung der Variablen:

$\int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow \ln(|y+1|) = \ln(t) + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

$e^{\ln(t)+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}} \cdot e^{\ln(t)} = e^{\tilde{c}} \cdot t$

$\Rightarrow |y+1| = e^{\tilde{c}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad y+1 = \underbrace{(\pm e^{\tilde{c}})}_{=:c}\, t \quad \Rightarrow \quad y(t) = ct - 1, \quad c \in \mathbb{R}$

Rücksubstitution: $u(t) = t\,y(t)$

$= ct^2 - t.$

Riccati-DGLn können auf **Bernoulli-Gleichungen** zurückgeführt werden, wenn wir eine partikuläre Lösung kennen.

Riccati-DGL: $u'(t) \;=\; a(t)u(t) \,+\, b(t)u(t)^2 \,+\, c(t)$

„inhomogene Bernoulli-Gleichung“ mit $\alpha = 2$

Gegeben sei eine partikuläre Lösung u_0. Dann gilt für $w := u - u_0$:

$$
\begin{aligned}
w' &= u' - u_0' = (au + bu^2 \cancel{+c}) - (au_0 + bu_0^2 \cancel{+c}) \\
&= a(u-u_0) + bu^2 - bu_0^2 \qquad -2bu_0^2 \\
&= a(u-u_0) + \underbrace{b(u-u_0)^2}_{bu^2 - 2buu_0 + bu_0^2} + 2buu_0 \; \cancel{-bu_0^2 - bu_0^2} \\
&= a \cdot w + bw^2 + 2bu_0 \cdot w \\
&= \left[a + 2bu_0\right] w + bw^2 \quad \longrightarrow \text{Bernoulli-Gleichung!}
\end{aligned}
$$

Riccati-DGLn können auf **lineare DGLn erster Ordnung** zurückgeführt werden, wenn wir eine partikuläre Lösung kennen.

Wir erhalten eine Bernoulli-Gleichung mit $\alpha = 2$: $\quad w' = [a + 2bu_0]\, w + bw^2.$

Substitution: $\quad y(t) := w^{1-2} = w^{-1}$ $\quad 1-\alpha = -1$

Transformierte DGL: $\quad y'(t) = -[a + 2bu_0]\, y - b, = \hat{a}y + \hat{b}$

mit $\hat{a} = -[a + 2bu_0],\quad \hat{b} = -b. \quad \rightarrow$ **Lösungsformel anwenden**

Rücksubstitution: $\quad y(t) = w(t)^{-1} = (u(t) - u_0(t))^{-1}$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{y(t)} + u_0(t).$$

Beispiel: $u' = \overset{0\cdot u(t)}{-}u(t)^2 + \frac{2}{t^2}, \qquad a(t) = 0, \quad b(t) = -1, \quad c(t) = \frac{2}{t^2}$

Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung u_0.

Ansatz: $u_0(t) = \frac{\alpha}{t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$ Damit: $u_0'(t) = -\frac{\alpha}{t^2}$

$$-\frac{\alpha}{t^2} = -\frac{\alpha^2}{t^2} + \frac{2}{t^2} \Rightarrow -\alpha = -\alpha^2 + 2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = 2$$

Wähle $\alpha = -1$. $u_0(t) = -\frac{1}{t}$.

Setze $\quad y(t) := \dfrac{1}{u(t) - u_0(t)} = \dfrac{1}{u(t) + \frac{1}{t}}.$

$w = u - u_0$

$y = \dfrac{1}{w}$

Löse

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= -\left[a(t) + 2u_0(t)b(t)\right] y(t) \overbrace{-\, b(t)}^{= \hat{b}(t)} \\
&= -\left[0 + 2\left(-\tfrac{1}{t}\right)(-1)\right] y(t) + 1 = \underbrace{-\tfrac{2}{t}}_{=:\, \hat{a}(t)} y(t) + 1
\end{aligned}
$$

$\hat{A}(t) = -2\ln(t)$

Lösungsformel: Wähle $B^*(t) := \frac{1}{3}t^3$ als Stammfunktion von $e^{-\hat{A}(t)}\hat{b}(t) = e^{2\ln(t)} = t^2$.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{\hat{A}(t)} \cdot \left[B^*(t) + c\right] = e^{-2\ln(t)} \cdot \left[\tfrac{1}{3}t^3 + c\right] \\
&= \frac{1}{t^2}\left[\tfrac{1}{3}t^3 + c\right] = \frac{t^3 + 3c}{3t^2}
\end{aligned}
$$

<u>**Rücksubstitution:**</u> $\quad u(t) = \dfrac{1}{y(t)} + u_0(t) = \dfrac{3t^2}{t^3 + 3c} - \dfrac{1}{t}.$

Euler-DGLn können in lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten überführt werden.

Euler-DGL: Für $t > 0$, $a_m \neq 0$

$$a_m t^m u^{(m)} + a_{m-1} t^{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 t u' + a_0 u = 0.$$

↪ Polynomiale Koeffizienten

Heute betrachten wir nur $m = 2$: $\quad a_2 t^2 u'' + a_1 t u' + a_0 u = 0, \quad t > 0.$

Substitution: $e^s := t, \quad y(s) := u(e^s).$ Damit:

Kettenregel: $y'(s) = u'(e^s) \cdot (e^s)' = e^s \cdot u'(e^s)$

$$y'(s) = e^s u'(e^s) = t u'(t)$$

$\Rightarrow y''(s) = (e^s)' \cdot u'(e^s) + e^s \cdot u''(e^s) \cdot e^s$

$$y''(s) = e^s u'(e^s) + e^{2s} u''(e^s) = y'(s) + t^2 u''(\overset{t}{\cancel{e^s}}) \quad \Rightarrow \quad t^2 u''(t) = y''(s) - y'(s).$$

Transformierte DGL: $\quad a_2 y''(s) + (a_1 - a_2) y'(s) + a_0 y(s) = 0.$ → Konstante Koeffizienten.

$\rightarrow$ Üben wir auf dem nächsten Zettel.

Rücksubstitution: $\quad s = \ln(t), \quad u(t) = y(\ln(t)).$

2. Exakte Differentialgleichungen

$D \subset \mathbb{R}^2$ offen, einfach zusammenhängend,
$f, g : D \to \mathbb{R}$ C^1 und $\Psi : D \to \mathbb{R}$ C^2

Eine Differentialgleichung der Form

$$f(t,u) \; + \; g(t,u) \cdot u'(t) \; = \; 0$$

heißt **exakt**, wenn es ein **Potential** $\Psi(t,u)$ gibt, so dass

$$\Psi_t(t,u) \; = \; f(t,u), \qquad \Psi_u(t,u) \; = \; g(t,u).$$

In diesem Fall sind die Lösungen gegeben durch die **Höhenlinien**
$\Psi(t,u(t)) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Bedingung für Exaktheit: Die Gleichung ist exakt, falls $f_u(t,u) \; = \; g_t(t,u)$ gilt.

$f = \Psi_t, \; g = \Psi_u \;\Rightarrow\; f_u = \Psi_{tu} = \Psi_{ut} = g_t$

Anwendungsbeispiel: Ein Körper im freien Fall

Beispiel: Wir betrachten ein Körper, der im freien Fall (ohne Luftwiderstand) aus einer (geringen) Höhe $h_0 > 0$ zu Boden fällt.

- Wir beschreiben die Geschwindigkeit v Abhängig von der Höhe: $v(h)$.
- Wir nehmen an, dass $v(h_0) = 0$.
- Für die Bewegung Richtung Boden wählen wir für v das negative Vorzeichen.

Frage: Wie erhalten wir eine Differentialgleichung, die das beschreibt?

Ansatz: Die Energie $E(h, v) := m \cdot gh + \frac{1}{2}v^2(h) \cdot m$

muss konstant sein, d.h. $\dfrac{\mathrm{d}E(h,v)}{\mathrm{d}h} = g + v(h) \cdot \dfrac{\mathrm{d}v(h)}{\mathrm{d}h} = 0.$

In diesem Fall können wir die Lösung schon berechnen

Wir können $g + v \cdot v' = 0,\ v(h_0) = 0$ durch Trennung der Variablen lösen:

$$v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h} = -g \quad \Rightarrow \quad \int v \mathrm{d}v = -\int g\, \mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 = -gh + c$$

$$\Rightarrow \quad v = -\sqrt{2(c - gh)}$$

Wähle negatives Vorzeichen.

$$\Rightarrow \quad v(h) = -\sqrt{2g(h_0 - h)}, \qquad h \in [0,\ h_0].$$

Wir können die Lösung auch über die Energiegleichung finden.

Die Gleichung hat die Form $t = h, \; u = v, \; \Psi = E.$

$$\frac{\partial E}{\partial h} + \frac{\partial E}{\partial v} v' \quad = \quad \frac{\mathrm{d}E(h)}{\mathrm{d}h} \quad = \quad 0,$$

mit $E(h, v) = gh + \frac{1}{2} v^2(h)$, d.h. die Lösungen sind gegeben durch die Höhenlinien

$$E(h, v(h)) = C.$$

Aus dem Anfangswertproblem erhalten wir $C = E(h_0, \underbrace{v(h_0)}_{=0}) = gh_0$, und daher:

$$gh + \frac{1}{2} v^2(h) \quad = \quad gh_0$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2g(h_0 - h) \quad \Rightarrow \quad v(h) = -\sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

⟶ Wir können v finden, indem wir eine algebraische Gleichung lösen!

Wir haben eine Methode zur Lösung exakter Gleichungen.

$$f(t,\ u(t))\ +\ g(t,\ u(t))u'(t)\ =\ 0$$

Lösungsmethode:

1. Auf Exaktheit testen: Gilt $f_u = g_t$?
2. Falls ja, bestimme Stammfunktionen

$$\int f(t,u)\,\mathrm{d}t\ +\ \underline{D(u)}, \qquad \int g(t,u)\,\mathrm{d}u\ +\ \underline{K(t)}.$$

   Versuche D und K so zu wählen, dass beide Stammfunktionen gleich sind, d.h.

$$\Psi(t,u)\ =\ \int f(t,u)\,\mathrm{d}t\ +\ D(u)\ =\ \int g(t,u)\,\mathrm{d}u\ +\ K(t).$$

3. Löse $\Psi(t,u) = C$ nach u auf. (Falls möglich.)

Beispiel: $\underbrace{2tu^2 + 2\mathrm{e}^{2t}}_{f} + \underbrace{2t^2u}_{g}u' = 0 = f(t,u(t)) + g(t,u(t))u'$,

mit $f(t,u(t)) = 2tu^2 + 2\mathrm{e}^{2t}$ und $g(t,u(t)) = 2t^2u$.

1. Auf Exaktheit testen: $f_u = 4tu = g_t$ ✓

2. Stammfunktionen bestimmen:

$$\int f(t,u)\,\mathrm{d}t = \int 2tu^2 + 2e^{2t}\,dt = t^2u^2 + e^{2t} + D(u)$$

$$\int g(t,u)\,\mathrm{d}u = \int 2t^2u\,du = t^2u^2 + K(t)$$

Wähle $D(u) = 0$ und $K(t) = e^{2t}$ $\Rightarrow$ $\Psi(t,u) = t^2u^2 + e^{2t}$

3. $t^2u^2 + e^{2t} = C$ $\Rightarrow$ $u(t) = \pm\sqrt{\frac{C - e^{2t}}{t^2}}$.

Beispiel: $5t^2 + 7u^2 + (14tu + \cos(u))u' = 0 = f(t, u(t)) + g(t, u(t))u'$,

mit $f(t, u(t)) = 5t^2 + 7u^2$ und $g(t, u(t)) = 14tu + \cos(u)$.

1. Auf Exaktheit testen: $f_u = 14u = g_t$ ✓

2. Stammfunktionen bestimmen:

$$\int f(t, u)\,\mathrm{d}t = \int 5t^2 + 7u^2\,dt = \frac{5}{3}t^3 + 7tu^2 + D(u)$$

$$\int g(t, u)\,\mathrm{d}u = \int 14tu + \cos(u)\,du = 7tu^2 + \sin(u) + K(t)$$

Wähle $D(u) = \sin(u)$ und $K(t) = \frac{5}{3}t^3$.

Damit: $\Psi(t, u) = \frac{5}{3}t^3 + 7tu^2 + \sin(u)$.

3. $$\frac{5}{3}t^3 + 7tu^2 + \sin(u) \;=\; C$$

Diese Gleichung können wir nicht nach u auflösen! Sie definiert aber **implizit** eine Lösung u.

Analysis III, Satz über implizite Funktionen: Es sei $C \in \mathbb{R}$ und

- $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Psi : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar;
- $(t_0, u_0) \in D$ mit $\Psi(t_0, u_0) = C$ und $\Psi_u(t_0, u_0) \neq 0$.

Dann gilt: Es gibt es Umgebungen I von t_0 und J von u_0, $I \times J \subset D$, sowie eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $u : I \to J$, so dass

$$\Psi(t, u(t)) = C \qquad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Für nicht-exakte Gleichungen können wir einen **integrierenden Faktor** einführen.

Ansatz: Ist die Gleichung

$$f(t,u) + g(t,u)u' = 0 \qquad \textit{nicht}\text{ exakt},$$

$$\underbrace{h(t,u)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left(f(t,u) + g(t,u)\,u'\right)}_{=0} = 0$$

suchen wir eine Funktion $h(t,u) \neq 0$, sodass

$$\underbrace{h(t,u) \cdot f(t,u)}_{\Phi_t} + \underbrace{h(t,u) \cdot g(t,u)}_{\Phi_u} u' = 0 \qquad \text{exakt}$$

ist. Wir wollen also die Integrabilitätsbedingung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}\left(h(t,u) \cdot f(t,u)\right)}_{(h\cdot f)_u} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(h(t,u) \cdot g(t,u)\right)}_{(h\cdot g)_t}$$

herstellen. Oft ist es sinnvoll anzunehmen, dass h nur von t oder nur von u abhängt.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$\underbrace{u^2 - 2t - 2}_{=f(t,u)} + \underbrace{2u}_{=g(t,u)} u' = 0$$

ist nicht exakt, denn $f_u = 2u \neq 0 = g_t$. Suche integrierenden Faktor der Form $h = h(t)$: , $h \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial u}(h(t) \cdot f(t,u)) = \frac{\partial}{\partial t}(h(t) \cdot g(t,u))$$

Produkt

~~Kettenregel~~:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h(t) \cdot g(t,u)) = h'(t) \cdot g(t,u) + h(t) \cdot \underbrace{g_t(t,u)}_{=0} = h'(t) \cdot 2u$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial u}(h(t) \cdot f(t,u)) = h(t) \cdot f_u(t,u) = h(t) \cdot 2u$$

Es soll also gelten: $h'(t) = h(t)$. Wähle $h(t) = e^t$.

Damit ist die Gleichung

$$e^t(u^2 - 2t - 2) + (2e^t u) \cdot u' = 0$$

exakt. Bestimme Potential:

$$\int e^t u^2 - 2e^t(t+1)\,dt = e^t u^2 - 2te^t + K(u)$$

$$\int 2e^t u\,du = e^t u^2 + D(t)$$

Wähle $D(t) = -2te^t$, $K(u) = 0$, und somit $\Psi(t,u) = e^t u^2 - 2te^t$

Löse Höhenlinien nach u auf:

$$\Psi(t,u) = C = e^t u^2 - 2te^t \Rightarrow u(t) = \pm\sqrt{\frac{c + 2te^t}{e^t}} = \pm\sqrt{ce^{-t} + 2t}$$