WS 2024/25

Differentialgleichungen 1
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 2:
mehr lineare DGLn erster Ordnung, Separierbare DGLn, Bernoulli DGLn, spezielle Lösungsansätze

---

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Mehr zu linearen Gleichungen erster Ordnung

Die Hauptarbeit bei linearen DGLn erster Ordnung: Integrale berechnen!

Beispiel: $y'(t) = \underbrace{-2t}_{a(t)}\, y(t) + \underbrace{\frac{1}{1+t^2}\cdot \mathrm{e}^{-t^2}}_{b(t)}, \qquad y(0) = y_0$

$y' = a \cdot y + b$

$t_0 = 0$

$a(t) = -2t, \quad A(t) = -t^2, \quad b(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot \mathrm{e}^{-t^2}.$

$A'(t) = a(t)$

Lösungsformel:

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \cdot \left[\int_0^t \mathrm{e}^{-A(\overset{s}{\cancel{t}})} \cdot b(s)\, \mathrm{d}s + y_0 \mathrm{e}^{-A(t_0)} \right]$$

$$= e^{-t^2} \cdot \left[\int_0^t \cancel{e^{+s^2}} \cdot \frac{1}{1+s^2} \cancel{e^{-s^2}}\, ds + y_0 \cdot \underbrace{e^{+0^2}}_{=1} \right]$$

$$= e^{-t^2} \cdot \left[\underbrace{\int_0^t \frac{1}{1+s^2}\, ds}_{} + y_0 \right] = e^{-t^2} \cdot \left[\arctan(s) \Big|_0^t + y_0 \right]$$

$$= e^{-t^2} \cdot \left[\arctan(t) + y_0 \right]$$

Muss man kennen / nachschlagen

Es lohnt sich einige Stammfunktionen zu kennen!

Zum Beispiel:

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$t^n,\ n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\arcsin(t)$	$t\arcsin(t) + \sqrt{1-t^2}$
$\frac{1}{t}$	$\ln(\lvert t\rvert)$	$\arccos(t)$	$t\arccos(t) - \sqrt{1-t^2}$
$\sin(kt),\ k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kt)$	$\arctan(t)$	$t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$
$\cos(kt),\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kt)$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin(t)$
$\tan(t)$	$-\ln\left(\cos(t)\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arccos(t)$
$\frac{1}{\sin^2(t)}$	$-\frac{1}{\tan(t)}$	$\frac{1}{1+t^2}$	$\arctan(t)$
$\frac{1}{\cos^2(t)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{t^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\frac{t-a}{t+a}\right\rvert\right)$
$\mathrm{e}^{\lambda t},\ \lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$	$\frac{1}{\sqrt{t^2\pm a^2}}$	$\ln\left(\lvert t+\sqrt{t^2\pm a^2}\rvert\right)$
$\ln(t)$	$t\ln(t) - t$		

Manchmal haben wir keine Chance.

Beispiel: $y'(t) = -2ty(t) + 1, \qquad y(0) = y_0$

$a(t) = -2t, \quad A(t) = -t^2, \quad b(t) = 1.$

Lösungsformel:

$$y(t) \quad = \quad \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \left[\int_0^t \mathrm{e}^{s^2} \, \mathrm{d}s + y_0 \right].$$

Das Integral $\int \mathrm{e}^{s^2} \, \mathrm{d}s$ hat keine elementare Darstellung!

$$y' = ay + b$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems

Allgemeine Lösung des homogenen Problems (u_h) $+$
eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems (u_p),

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$A'(t) = a(t)$

Dabei gilt

$$\underbrace{u_h'(t) = a(t)u_h(t)}_{\text{Homogenes Problem}} \quad \Rightarrow \quad u_h(t) = \underline{ce^{A(t)}} = cu_H(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

Ziel: Konstruiere ein u_p.

Wir definieren

$$u_H(t) := e^{A(t)} \quad \text{(ohne Konstante } c\text{)}$$

Seien $u,\ u_p$ Lösungen von $u' = au + b$

$$(u - u_p)' \quad = \quad u' - u_p' \quad = \quad (au + b) - (au_p + b) \quad = \quad a\,(u - u_p)\,.$$

Die Differenz zweier Lösungen löst das homogene Problem!

Wir können schreiben:

$$u \;=\; u_p \;+\; \overbrace{(u - u_p)}^{= u_h = c \cdot U_H},$$

d.h. wenn wir *eine* Lösung u_p des inhomogenen Problems kennen, können wir *jede* Lösung u schreiben als Summe von u_p und einer Lösung des inhomogenen Problems.

Die Lösung linearer Probleme erster Ordnung:

Variation der Konstanten

$u_h = c \cdot u_H(t)$

Ansatz: $u_p(t) = c(t)u_H(t)$, finde geeignetes $c(t)$.

← Daher der Name Variation der Konstanten.

Es soll gelten:

Produktregel:

$u_p' = c' \cdot u_H + c \cdot u_H'$

$u_p' = a\,u_p + b$

$$u_p'(t) - a(t)u_p(t) = b(t)$$

$$\Rightarrow \quad b(t) = c'(t)u_H(t) + \cancel{c(t)u_H'(t)} - \underbrace{\cancel{a(t)c(t)u_H(t)}}_{=c(t)u_H'(t)}$$

$a \cdot u_H = u_H'$

$b(t) = c'(t) \cdot u_H(t)$

$\Rightarrow c' = \frac{b}{u_H}$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = \frac{b(t)}{u_H(t)} = b(t) \cdot e^{-A(t)} \quad \longrightarrow \text{integrieren!}$$

$u_H(t) = e^{A(t)}$

Anwendung auf ein vorheriges Beispiel

$$u'(t) = \tfrac{1}{t}u(t) + t, \qquad t \geq 1, \qquad u(1) = y_0.$$

$$a(t) = \tfrac{1}{t} \qquad \rightarrow \qquad \text{wähle } A(t) = \ln(t) \qquad \Rightarrow \qquad u_H(t) = \underline{\mathrm{e}^{A(t)}} = t.$$

$$b(t) = t, \qquad t_0 = 1$$

$$u_h = c \cdot e^{A(t)}$$

Ansatz: $y_p(t) = c(t)u_H(t) = c(t)t.$

Für $c(t)$ muss gelten: $c'(t) = \frac{b(t)}{u_H(t)} = \frac{t}{t} = 1 \rightsquigarrow$ wähle $c(t) = t$

Damit: $u_p(t) = c(t)u_H(t) = t \cdot t = t^2.$

Allgemeine Lösung: $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c \cdot t + t^2$

Lösung des AWP: $u(1) = y_0 = c \cdot 1 + 1^2 = c + 1 \Rightarrow c = y_0 - 1$

$$\Rightarrow u(t) = (y_0 - 1)t + t^2.$$

2. Separierbare Gleichungen und die Trennung der Variablen

Eine **separierbare Differentialgleichung**, auch eine Differentialgleichung mit **getrennten Variablen** genannt, hat die Form

$$u'(t) = g(u) \cdot h(t).$$

Lösungsmethode: Wir versuchen eine Lösung zu finden, indem wir die Gleichung

$$\int \frac{1}{g(u)}\, \mathrm{d}u \quad = \quad \int h(t)\, \mathrm{d}t$$

lösen.

Beispiele für separierbare DGLn: Sehen wir gleich viele.

Beispiele für nicht-separierbare DGLn: $u' = au + b,\ b \neq 0$, oder $u' = \sin(tu)$

a,b nicht konstant.

$u = 0$ ist eine Lösung

Beispiel: $u' = \underbrace{(1+t^2)}_{h(t)}\underbrace{u}_{g(u)}$ $\Rightarrow \frac{du}{dt} = u \cdot (1+t^2)$

$\tilde{c} = c_2 - c_1 \in \mathbb{R}$

Für $u \neq 0$:

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \int (1+t^2)\,dt \Rightarrow \ln(|u|) \cancel{+c_1} = t + \frac{1}{3}t^3 \cancel{+c_2} + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow |u| = \exp\left(\tilde{c} + t + \frac{1}{3}t^3\right) = \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{>0} \cdot e^{t+\frac{1}{3}t^3}$$

$$\Rightarrow u = \underbrace{\left(\pm e^{\tilde{c}}\right)}_{\neq 0} \cdot e^{t+\frac{1}{3}t^3}$$

$\Rightarrow u(t) = c \cdot e^{t+\frac{1}{3}t^3}$, $c \in \mathbb{R}$, da auch $u=0$ eine Lösung ist.

Beispiel: $u' = \frac{\cos(t)}{\sqrt{u}}$, $u > 0$ $\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{u}}$

$$\Rightarrow \int \overset{=u^{1/2}}{\sqrt{u}}\, du = \int \cos(t)\, dt \Rightarrow \frac{2}{3} u^{3/2} = \sin(t) + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u^{3/2} = \frac{3}{2}\sin(t) + c, \quad c = \frac{3}{2}\tilde{c}$$

$$\Rightarrow u(t) = \left(\frac{3}{2}\sin(t) + c\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sin(t) + c}\right)^2 \geq 0$$

nur Lösung für $\frac{3}{2}\sin(t) + c \neq 0$

Beispiel: $2x^2y' = y^2$, $y = 0$ ist Lösung.

Für $y \neq 0$: $\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{1}{2x^2}\, dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2x} - \tilde{c} \cdot \frac{2x}{2x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x}{1 - cx}, \quad c = 2\tilde{c}, \quad x \neq \frac{1}{c}$$

Beispiel: $y' = \underbrace{(y^2 - 1)}_{g(y)} \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$. $y = \pm 1$ sind Lösungen

Für $y \neq \pm 1$:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int 1\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1-y}{1+y}\right|\right) = x + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

nachlesen

$$\Rightarrow \left|\frac{1-y}{1+y}\right| = e^{2(x+\tilde{c})} = \underbrace{e^{2\tilde{c}}}_{>0} \cdot e^{2x}$$

$c = \pm e^{2\tilde{c}}$

$$\Rightarrow \frac{1-y}{1+y} = \underbrace{(\pm e^{2\tilde{c}})}_{=:c} \cdot e^{2x} = c \cdot e^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow 1 - y = (1+y)\cdot c e^{2x} \Rightarrow 1 - ce^{2x} = y + ye^{2x} = y(1 + c\cdot e^{2x})$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1-ce^{2x}}{1+ce^{2x}}, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ da auch } y = 1 \text{ eine Lösung ist.}$$

$$y(x) = \frac{1-ce^{2x}}{1+ce^{2x}} = \frac{e^{-2x}-c}{e^{-2x}+c} \xrightarrow{c\to\infty} -1,$$

d.h. $y = -1$ entsteht aus der Lösungsdarstellung für $c \to \infty$.

Beispiel: $y' = \underset{\geq 0}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int 1\, dx, \quad y \neq \pm 1$

↪ nachlesen

$\Rightarrow \arcsin(y) = x + c \Rightarrow y(x) = \sin(x+c), \quad c \in \mathbb{R}$

Für $c = 0$: $y(x) = \sin(x) \Rightarrow y'(x) = \cos(x) \geq 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

→ Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung, da die DGL $y' \geq 0$ verlangt!

Die Funktion $\tilde{y}(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\pi/2 \\ \sin(x), & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases}$

Stückweise ist $\tilde{y}$ eine Lösung, da ± 1 und $\sin(x)$ Lösungen sind.

Ist $\tilde{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff.bar? Nur $\pm \frac{\pi}{2}$ sind kritisch.

$\tilde{y}$ stetig und stückweise diff.bar mit:

$$\tilde{y}'(x) = \left.\begin{cases} 0, & x < -\pi/2 \\ \cos(x), & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}\right\} = \lim_{x \to \pm \pi/2} \tilde{y}'(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{y}$ ist stetig diff.bar und erfüllt die DGL auf ganz $\mathbb{R}$.

Beispiel: $v \cdot v' = -\frac{a}{(x+b)^2}, \qquad x > 0 \qquad$ mit Konstanten $a, b > 0$

$$\int v \, dv = \int -\frac{a}{(x+b)^2} \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \frac{a}{x+b} + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{\frac{2a}{x+b} + c}, \qquad c = 2\tilde{c} \in \mathbb{R}$$

für $\frac{2a}{x+b} + c > 0$.

Siehe folgende Seiten für eine Anwendung dieser Gleichung.

Anwendungsbeispiel: Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit

Exkurs für besonders Interessierte

Beispiel: Wir nehmen an, eine Rakete fliegt senkrecht von der Erdoberfläche nach oben. Sie hat eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$, aber keinen eigenen Antrieb.

x : Höhe über dem Erdboden,
v : Geschwindigkeit,
R : Erdradius
v_0 : Anfangsgeschwindigkeit
g : Gravitationskonstante

Beschleunigung durch Gravitation (ohne Luftwiderstand):

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

Falls die Rakete die ganze Zeit aufsteigt: $\frac{dx}{dt} > 0$.

Mit

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v$$

erhalten wir:

$$v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

Siehe vorheriges Beispiel,
$a = gR^2$, $b = R$

Anwendungsbeispiel: Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit

Exkurs für besonders Interessierte.

Das entstehende Anfangswertproblem lösen wir durch Trennung der Variablen:

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

$$\Rightarrow \quad v\mathrm{d}v = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int v\mathrm{d}v = -\int \frac{gR^2}{(x+R)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{(x+R)} + c$$

Wir brauchen

$$\frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR > 0$$

Mit $v^2(0) = v_0^2$:

$$v^2 = \frac{2gR^2}{(x+R)} + v_0^2 - 2gR \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{\frac{2gR^2}{(x+R)} + v_0^2 - 2gR}$$

Anwendungsbeispiel: Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit

Exkurs für besonders Interessierte

Das funktioniert nur, so lange

$$\frac{2gR^2}{(x+R)} + v_0^2 - 2gR > 0,$$

sonst ist x keine streng monotone Funktion von t und die obige Herleitung gilt nicht mehr. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2gR^2}{(x+R)} = 0$$

ist dieser Ausdruck nur für alle $x > 0$ positiv, falls

$$v_0^2 \geq 2gR \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{2gR}$$

Mit $g \approx 9,81\, m/s^2$, und $R \approx 6371\, km$ berechnen wir die **Fluchtgeschwindigkeit** der Erde als

$$v_e \approx 11,18\, km/s. \qquad = \sqrt{2gR}\,.$$

3. Bernoulli-Gleichungen

Bernoulli-DGLn können durch **Substitution** auf lineare Gleichungen transformiert werden

Bernoulli'sche Differentialgleichung:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad b \neq 0.$$

Substitution: $y(t) := u(t)^{1-\alpha}$ $= f(u)$, $f(u) = u^{1-\alpha}$

Damit gilt:

$$y'(t) = \left(u^{1-\alpha}(t)\right)' = (1-\alpha) \cdot \underbrace{u(t)^{1-\alpha-1}}_{u^{-\alpha}} \cdot u'(t)$$

$$= (1-\alpha)\, u(t)^{-\alpha} \cdot \left[a(t)u(t) + b(t)\,u(t)^{\alpha}\right] = (1-\alpha)\left[a(t)\underbrace{u(t)^{1-\alpha}}_{=y(t)} + b(t)\right]$$

D.h. y löst das linear Problem

$$y'(t) = \tilde{a}(t)y(t) + \tilde{b}(t)$$

mit $\tilde{a}(t) = (1-\alpha)a(t), \quad \tilde{b}(t) = (1-\alpha)b(t).$

Beispiel: $u'(t) = -u(t) + tu(t)^3, \qquad u(0) = \sqrt{\frac{2}{3}},$ $\Rightarrow u^{-2}(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{3}{2}$

$a(t) = -1, \quad b(t) = t, \quad \alpha = 3.$ $\Rightarrow 1 - \alpha = -2$

Substitution: $y(t) = u(t)^{-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t) = y(t)^{-1/2}.$

DGL für y: $y'(t) = 2y(t) - 2t, \qquad y(0) = u(0)^{-2} = \frac{3}{2}.$

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-2s}(-2s)\,\mathrm{d}s + \frac{3}{2} \right).$$

Nebenrechnung:

$$\boxed{\int f g' \, ds = fg - \int f' g \, ds}$$

Partielle Integration

$$\int_0^t (-2s\mathrm{e}^{-2s}) \, \mathrm{d}s = \cancel{-2}s \cdot \left(\cancel{-\frac{1}{2}} e^{-2s}\right)\Big|_0^t - \int_0^t e^{-2s} ds = t e^{-2t} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2s}\right)\Big|_0^t$$

$$= t e^{-2t} + \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) = \frac{1}{2} e^{-2t}(2t+1) - \frac{1}{2}$$

Damit:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2t} \cdot \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-2s}(-2s) \, \mathrm{d}s + \frac{3}{2}\right) \\ &= e^{2t} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{-2t}(2t+1) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}(2t+1) + e^{2t} \end{aligned}$$

Zurück transformieren:

$$u = y^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{y}} .$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(2t+1) + e^{2t}}}$$

4. Spezielle Lösungsansätze

Manchmal hilft ein **spezieller Ansatz** beim Finden einer Lösung.

„Inhomogene Bernoulli-Gleichung" mit $\alpha = 2$.

Beispiel: $u' = -\mathrm{e}^{-2t}u + \mathrm{e}^{t}u^2\big(-6\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-5t}\big)$

Ansatz: $u(t) = c\mathrm{e}^{\beta t}$ $\longrightarrow$ finde geeignete $c, \beta \in \mathbb{R}$.

Eingesetzt in die Gleichung:

zwei Potenzen

$$-6\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-5t} = u' + \mathrm{e}^{-2t}u - \mathrm{e}^{t}u^2 = c\cdot\beta e^{\beta t} + e^{-2t}\cdot c e^{\beta t} - e^{+t}\cdot c^2 e^{2\beta t}$$

$$= c\beta e^{\beta t} + c e^{(\beta-2)t} - c^2 e^{(2\beta+1)t}$$

drei Potenzen

Es gilt $\beta = \beta - 2$, d.h. es muss $\beta = 2\beta + 1$ oder $\beta - 2 = 2\beta + 1$ gelten.

$$\beta - 2 = 2\beta + 1 \Rightarrow \beta = -3, \quad \beta - 2 = 2\beta + 1 = -5$$

Damit: $-6e^{-3t} - 2e^{-5t} = -3ce^{-3t} + (c - c^2)e^{-5t} \Rightarrow c = 2$

$$\Rightarrow u(t) = 2e^{-3t}.$$