Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1 für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 1:

Einleitung, Charakterisierung von DGLn, lineare DGLn erster Ordnung

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

Was ist eine **gewöhnliche Differentialgleichung?**

nur eine Variable

$I \subseteq \mathbb{R}$: ein Intervall, F: eine gegebene Funktion

<u>**Gesucht:**</u> Eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}^n$, die für alle $t \in I$ die Bedingung

$$F(t, u(t),\ u'(t),\ u''(t), \ldots, u^{(m)}(t)) = 0$$

Lösung ist eine Funktion u.

erfüllt. Wir nennen m die Ordnung der Differentialgleichung.

Explizite Gleichung: $$u^{(m)} = f(t, u(t),\ u'(t),\ u''(t), \ldots, u^{(m-1)}(t))$$

Ordnung: Höchste Ableitung, die auftaucht.

Heute betrachten wir nur $n = 1$, d.h. skalare Gleichungen.

<u>**Zur Notation:**</u> Manchmal schreiben wir, je nach Kontext, auch x statt t, oder y statt u.

Statt $u'(t)$ schreiben wir manchmal $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ oder $\dot{u}(t)$.

Was ist eine **gewöhnliche Differentialgleichung?**

Beispiele:

$$(1) \quad u'''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 0,$$

Kurz:

$$(2) \quad tu'(t) + 3u(t) - 6t^3 = 0, \quad tu' + 3u - 6t^3 = 0$$

$$(3) \quad (u'(t))^2 - 4u(t) = 0,$$

$$(4) \quad t^2u''(t) + 3u(t) - 6t^3 = 0,$$

$$(5) \quad 2t^2u''(t) - (u'(t))^2 = 0.$$

***Keine* gewöhnliche Differentialgleichung:** $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$

- Partielle Differentialgleichung (nächstes Semester)

Was ist eine **Lösung** einer Differentialgleichung?

Beispiel: Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist

$$u(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2 \qquad \text{eine Lösung von} \qquad u'(t) = \sqrt{u(t)}.$$

Denn: $u'(t) = 2 \cdot \left(\frac{t+c}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{t+c}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{t+c}{2}\right)^2} = \sqrt{u(t)}$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aber: $\tilde{u}(t) = \alpha \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$ ist nur eine Lösung für $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$, denn

$\tilde{u}'(t) = \alpha \left(\frac{t+c}{2}\right)$, $\sqrt{\tilde{u}(t)} = \sqrt{\alpha} \left(\frac{t+c}{2}\right)$

Gleichheit für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nur für $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$.

Wir brauchen **Anfangs-/Randdaten!**

Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung hat typischerweise frei wählbare Parameter. Wir brauchen zusätzliche Bedingungen, um diese festzulegen.

Beispiel: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$u(t) = ct + t^2 \qquad \text{eine Lösung von} \qquad u'(t) = \frac{1}{t}u(t) + t, \quad t \geq 1.$$

$$u'(t) = c + 2t = (c+t) + t$$

$$= \frac{1}{t}\underbrace{(ct+t^2)}_{=u(t)} + t = \frac{1}{t}u(t) + t$$

Anfangsbedingung: $u(1) = 0$. Damit:

$$u(1) = 0 = c \cdot 1 + 1^2 = c + 1 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow u(t) = -t + t^2.$$

Wir brauchen **Anfangs-/Randdaten!**

Beispiel: Für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \sin(t) \qquad \text{eine Lösung von} \qquad u''(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$u'(t) = c_2 - \cos(t)$$

$$u''(t) = \sin(t)$$

Gleichung zweiter Ordnung

$\rightsquigarrow$ wir brauchen zwei Bedingungen!

Randbedingungen: $u(0) = 0,\ u(\pi) = 1.$ Damit:

$$u(0) = 0 = c_1 + \underbrace{c_2 \cdot 0}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} = c_1 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$u(\pi) = 1 = \underbrace{c_1}_{=0} + c_2\pi - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = c_2\pi \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{t}{\pi} - \sin(t)$$

Auf welchem **Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$** betrachten wir die Differentialgleichung?

Beispiel: $u'(t) = \frac{1}{t}u(t) + t$, nur definiert für $t \neq 0$,

$$I_1 = (-\infty, 0), \qquad I_2 = (0, \infty)$$

- Die Einschränkung kommt aus dem Definitionsbereich der Differentialgleichung.

Beispiel: $u'(t) = -2t(1 + u(t))^2$, hat die Lösungen:

(1) $u_1(t) = -1, \quad I = \mathbb{R},$ $u_1'(t) = 0 = -2t\,(1+(-1))^2$

(2) $u_2(t) = -1 + \dfrac{1}{\underline{t^2 - c}}, \quad c \in \mathbb{R}$ Bedingung: $t^2 - c \neq 0$.

Falls $c < 0$:	Falls $c = 0$:	Falls $c > 0$:
$I = \mathbb{R}$	$I_1 = (-\infty,\ 0)$ $I_2 = (0,\ \infty)$	$I_1 = (-\infty,\ -\sqrt{c})$ $I_2 = (-\sqrt{c},\ \sqrt{c})$ $I_3 = (\sqrt{c}, \infty)$

- Die Einschränkung kommt aus dem Definitionsbereich der Lösung.

- Viele Differentialgleichungen kann man nicht analytisch lösen.
- Aber: Auch wenn wir die Lösung nicht kennen, kann man oft trotzdem oft wertvolle Erkenntnisse gewinnen.
- Und: Für spezielle Formen von Differentialgleichungen gibt es Lösungsmethoden.
- Wir werden (nicht einmal annähernd) alle Typen von Differentialgleichungen behandeln können.

Welche Typen von Differentialgleichungen gibt es?

Die Koeff. $A_j(t)$, $a_j(t)$ können nichtlineare Funktionen in t sein!

Lineare Differentialgleichungen:

$$A_m(t)u^{(m)}(t) + \ldots + A_2(t)u''(t) + A_1(t)u'(t) + A_0(t)u(t) = b(t)$$

bzw.

$$u^{(m)}(t) = a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \overset{+}{\cancel{=}} b(t)$$

Fall $b = 0$: **Homogene Gleichung**

Die Funktion u und ihre Ableitungen tauchen nur linear auf.

Welche Typen von Differentialgleichungen gibt es?

	Gleichung	Ordnung	Linear ?	Homogen ?
(1)	$u'''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 0$	3	✓	✓
(2)	$A_1(t) = t, \quad A_0(t) = 3, \quad b(t) = 6t^3$ $tu'(t) + 3u(t) - 6t^3 = 0$	1	✓	✗
(3)	$(u'(t))^2 - 4u(t) = 0$	1	✗	✓
(4)	$A_2(t) = t^2, \quad A_1(t) = 0, \quad A_3(t) = 3$ $t^2u''(t) + 3u(t) - 6t^3 = 0$	2	✓	✗
(5)	$2t^2u''(t) - (u'(t))^2 = 0$	2	✗	✓

Die Lösung **linearer Differentialgleichungen erster Ordnung**:
Die Lösungsformel

Das Anfangswertproblem für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \qquad u(t_0) = y_0.$$

hat die Lösung:

$$u(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s) \,\mathrm{d}s + y_0 \mathrm{e}^{-A(t_0)} \right]$$

$A(t)$: Stammfunktion von a.

Einfachstes Beispiel: Homogen mit konstanten Koeffizienten

→ Änderung proportional zur Funktion selbst.

$$u'(t) = \lambda u(t), \qquad u(0) = y_0,$$

d.h. $\quad a(t) = \lambda =$ konst., $\qquad b = 0, \qquad t_0 = 0.$

Wähle $\quad A(t) = \lambda t.\quad$ Damit:

$$u(t) = e^{\lambda t} \cdot \left[\underbrace{\int_0^t e^{-\lambda s} \cdot 0 \, ds}_{=0} + y_0 \underbrace{e^{-\lambda \cdot 0}}_{=1} \right]$$

$$= y_0 e^{-\lambda t}$$

Anwendungsbeispiel: Radiokarbondatierung

Willard Frank Libby, Nobelpreis für Chemie 1960:

- Organisches Material enthält u.a. das radioaktive Kohlenstoffisotop C^{14}.
- Der Anteil von C^{14} an der gesamten Kohlenstoffmenge ist in lebenden Organismen nahezu konstant.
- Nach dem Tod sinkt der C^{14}-Anteil durch radioaktiven Zerfall.
- Aus dem gemessenen C^{14}-Anteil eines archäologischen Fundes kann man sein Alter ermitteln.
- Halbwertzeit von C^{14}: ca. 5370 Jahre

Anwendungsbeispiel: Radiokarbondatierung

$u(t)$: C^{14}-Anteil, u_0 : „normaler“ C^{14}-Anteil in lebenden Organismen

Radioaktiver Zerfall: $u'(t) = -\lambda u(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = u_0 e^{-\lambda t}$

Halbwertzeit Funktionswert

Bestimme λ: $u(5370) = 0.5 \cancel{u_0} = \cancel{u_0} e^{-\lambda \cdot 5370}$

$$\Rightarrow \ln(0.5) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot 5370}\right) = -\lambda \cdot 5370 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.5)}{5370} \approx 0.00012.$$

Beispiel: Das Holz eines geborgenes Schiffswracks hat noch 90% des ursprünglichen C^{14}-Anteils. Wie alt ist es?

$$u(t_*) = 0.9\, u_0 = u_0 \exp\left(\frac{\ln(0.5)}{5370} \cdot t_*\right)$$

$$\Rightarrow \ln(0.9) = \frac{\ln(0.5)}{5370} t_* \Rightarrow t_* = 5370 \cdot \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.5)} \approx 816.$$

Die Lösungsformel für ein etwas komplizierteres Beispiel

$$u'(t) = \frac{1}{t}u(t) + t, \qquad t \geq 1, \qquad u(1) = y_0.$$

$a(t) = \frac{1}{t}$, wähle $A(t) = \ln(t)$, $b(t) = t$, $\qquad t_0 = 1$.

Lösungsformel:

$$u(t) = e^{A(t)} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \; + \; y_0 e^{-A(t_0)} \right]$$

$$= \underbrace{e^{\ln(t)}}_{=t} \cdot \left[\int_1^t \underbrace{e^{-\ln(s)}}_{=\frac{1}{s}} \cdot s \, ds + y_0 \underbrace{e^{-\overbrace{\ln(1)}^{=0}}}_{=1} \right]$$

$$= t \cdot \left[\int_1^t 1 \, ds + y_0 \right] = t \cdot (t - 1 + y_0)$$

$$= (y_0 - 1)t + t^2$$

Mit $y_0 = 0$ folgt die Lösung von vorhin:

$u(t) = -t + t^2$.

Sei A Stammfkt. von a, d.h. $A'(t) = a(t)$

$$\Rightarrow \left(e^{A(t)}\right)' = A'(t)\, e^{A(t)} = a(t)\, e^{A(t)}.$$

Sei $B_*(t)$ Stammfkt. von $e^{-A(t)} b(t)$, d.h. $B_*'(t) = e^{-A(t)} b(t)$.

Damit: $$u(t) = e^{A(t)} \cdot \left[\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds + y_0 e^{-A(t_0)} \right]$$

$$= e^{A(t)} \cdot \left[B_*(t) - \underbrace{B_*(t_0) + y_0 e^{-A(t_0)}}_{\text{konst.}} \right]$$ Da B_* Stammfkt.

Produkt-regel

$$\Rightarrow u'(t) = \left(e^{A(t)}\right)' \cdot \left[B_*(t) - B_*(t_0) + y_0 e^{-A(t_0)} \right] + e^{A(t)} \cdot B_*'(t)$$

$$= a(t) \underbrace{e^{A(t)} \cdot \left[B_*(t) - B_*(t_0) + y_0 e^{-A(t_0)} \right]}_{= u(t)} + e^{A(t)} \cdot e^{-A(t)} \cdot b(t)$$

$$= a(t)\, u(t) + b(t).$$

Die Lösung linearer Probleme erster Ordnung:

Variation der Konstanten

$(u - u_p)' = u' - u_p' = (au + b) - (au_p + b)$
$= a(u - u_p)$

$\to$ Differenz löst das homogene Problem

$u = u_p + (u - u_p).$

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems

Allgemeine Lösung des homogenen Problems (u_h) $\quad +$
eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems (u_p),

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

Dabei gilt

$$u_h'(t) = a(t)u_h(t) \qquad \Rightarrow \quad u_h(t) = c\mathrm{e}^{A(t)} = cu_H(t)$$

<u>Ziel:</u> Konstruiere ein u_p.

Die Lösung linearer Probleme erster Ordnung:
Variation der Konstanten

Ansatz: $u_p(t) = c(t)u_H(t)$, finde geeignetes $c(t)$.

Es soll gelten:

$$\begin{aligned} & u_p'(t) - a(t)y_p = b(t) \\ \Rightarrow \quad & b(t) = c'(t)u_H(t) + c(t)u_H'(t) - \underbrace{a(t)c(t)u_H(t)}_{=c(t)u_H(t)} \\ \Rightarrow \quad & c'(t) = \frac{b(t)}{u_H(t)} \qquad \longrightarrow \text{ integrieren!} \end{aligned}$$

Anwendung auf das vorherige Beispiel

$$u'(t) = \frac{1}{t}u(t) + t, \qquad t \geq 1, \qquad u(1) = y_0.$$

$$a(t) = \cancel{t}\ \frac{1}{t} \quad \to \quad \text{wähle } A(t) = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad u_H(t) = e^{A(t)} = t.$$

$$b(t) = t, \qquad t_0 = 1$$

Ansatz: $y_p(t) = c(t)u_H(t) = c(t)t.$

Für $c(t)$ muss gelten: $c'(t) = \frac{b(t)}{u_H(t)} = \frac{t}{t} = 1$, wähle $c(t) = t$.

Damit: $u_p(t) = c(t)u_H(t) = t \cdot t = t^2.$

Allgemeine Lösung: $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = ct + t^2$

Lösung des AWP: $u(1) = y_0 = c \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow c = y_0 - 1$

$\Rightarrow u(t) = (y_0 - 1)t + t^2$

Wie vorher!