Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Klausur WiSe 24/25 – Lösungen

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$u'(t) = -(2t+1)u(t) + \mathrm{e}^{-t^2} \quad \text{für} \;\; t \geq 0, \qquad u(0) = 1.$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe einer geeigneten Substitution:

$$u'(t) = (2t+1)u(t) - \mathrm{e}^{-t^2}(u(t))^2 \quad \text{für} \;\; t \geq 0, \qquad u(0) = 1.$$

Lösung.

(a) Wir haben eine lineare Gleichung der Form $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$ mit $a(t) = -(2t+1)$ und $b(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$. Wir wählen

$$A(t) = -(t^2 + t)$$

als Stammfunktion von a und erhalten die Lösung des Anfangswertproblems aus der Lösungsformel mit $t_0 = 0$ und $y_0 = 1$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \cdot \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s + y_0 \mathrm{e}^{-A(t_0)}\right] = \mathrm{e}^{-(t^2+t)} \cdot \left[\int_0^t \mathrm{e}^{(s^2+s)}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + 1\right] \\ &= \mathrm{e}^{-(t^2+t)} \cdot \left[\int_0^t \mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s + 1\right] = \mathrm{e}^{-(t^2+t)}\left[\mathrm{e}^t - 1 + 1\right] = \mathrm{e}^{-t^2}. \end{aligned}$$

(b) Wir haben eine *Bernoulli'sche* Differentialgleichung mit

$$a(t) = (2t+1), \qquad b(t) = -\mathrm{e}^{-t^2}, \qquad \alpha = 2.$$

Die Substitution

$$y(t) = u(t)^{1-\alpha}, \qquad y(0) = u(0)^{1-\alpha}$$

liefert

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t) = -(2t+1)y(t) + \mathrm{e}^{-t^2}, \qquad y(0) = 1.$$

Nach Teil (a) hat dies die Lösung $y(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$. Die Lösung u erhalten wir aus der Rücksubstitution

$$u(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = y(t)^{-1} = \mathrm{e}^{t^2}.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u'''(t) + 2u''(t) = 0 \qquad \text{für } \; t > 0. \tag{$*$}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

(b) Genügt die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ um eine eindeutige Lösung von $(*)$ zu erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt die Lösung u des Anfangswertproblems für $(*)$ mit

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = a, \quad u''(0) = b$$

die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0?$$

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^3 + 2\lambda^2 \;=\; \lambda^2(\lambda + 2)$$

und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_3 = -2.$$

Damit ist

$$\left\{ w_1(t) = \mathrm{e}^{-2t},\; w_2(t) = \mathrm{e}^{0\cdot t} = 1,\; w_3(t) = t\mathrm{e}^{0\cdot t} = t \right\}$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung lautet

$$u(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} \;+\; c_2 \;+\; c_3 t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Z.B. lösen $u_1(t) = 1$ und $u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ das Anfangswertproblem.

(c) Jede Lösung u hat die Form $u(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2 + c_3 t$. Damit $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ gilt, muss dann $c_2 = c_3 = 0$ sein. Aus der Anfangsbedingung $u(0) = 1$ folgt dann $c_1 = 1$.

D.h. die Funktion $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ ist die einzige Lösung der Differentialgleichung, die die erste Anfangsbedingung $u(0) = 1$, sowie $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ erfüllt. Wir haben

$$u'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} \quad \Rightarrow \quad u'(0) = -2,$$
$$u''(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} \quad \Rightarrow \quad u''(0) = 4.$$

Wir brauchen also $a = -2,\; b = 4$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(t-\sin(t)\cos(t))u^2 \;+\; (t^2+\cos^2(t)+1)u\cdot u' = 0 \qquad \text{für } t>0.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie ein Potential für diese Gleichung.

(c) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $u(0)=1$.

Lösung.

(a) Mit

$$f(t,u) = (t-\sin(t)\cos(t))u^2, \qquad g(t,u) = (t^2+\cos^2(t)+1)u$$

hat die Gleichung die Form

$$f(t,u) + g(t,u)u' = 0.$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \;=\; 2(t-\sin(t)\cos(t))u \;=\; \frac{\partial g}{\partial t}(t,u),$$

also ist die Gleichung exakt.

(b) Wir haben

$$\int (t-\sin(t)\cos(t))u^2 \,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}(t^2+\cos^2(t))u^2 + K(u),$$

$$\int (t^2+\cos^2(t)+1)u \,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{2}(t^2+\cos^2(t)+1)u^2 + M(t),$$

d.h. mit

$$K(u) = \frac{1}{2}u^2, \qquad M(t) = 0$$

erhalten wir Gleichheit und ein Potential ist gegeben durch

$$\Psi(t,u) \;=\; \frac{1}{2}(t^2+\cos^2(t)+1)u^2.$$

(c) Die Lösungen sind gegeben für $C>0$ durch

$$\Psi(t,u) = C \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}(t^2+\cos^2(t)+1)u^2 = C \quad\Rightarrow\quad u = \pm\sqrt{\frac{2C}{t^2+\cos^2(t)+1}}.$$

Damit folgt

$$1 = u(0) = \sqrt{\frac{2C}{2}} \quad\Rightarrow\quad C = 1$$

und somit

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{t^2+\cos^2(t)+1}}.$$

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $u' = Au$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für diese Gleichung.

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und prüfen Sie diese auf Stabilität.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 1.$$

Zugehörige Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v^{[1]} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Zu $\lambda_2 = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v^{[2]} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Zu $\lambda_3 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v^{[3]} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Ein Fundamentalsystem ist somit

$$\left\{ \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Da alle Eigenwerte ungleich Null sind, ist $u^* = (0,0,0)^\top$ die einzige Ruhelage. Da $\lambda_3 > 0$, ist u^* instabil.