Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Klausur SoSe 2025 - Lösungen

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils zuerst die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Lösen Sie dann die Anfangswertprobleme zu den jeweils gegebenen Anfangsdaten und geben Sie an, für welche t die zugehörigen Lösungen existieren.

(a) $2t^2u' = u^2$ für $t \geq 1$, $u(1) = 4$,

(b) $u'u = \mathrm{e}^t$ für $t \geq 0$, $u(0) = 2$.

Lösung.

(a) Die Gleichung hat die Form $u' = u^2 \cdot \frac{1}{2t^2}$. Eine Lösung ist $u = 0$. Für $u \neq 0$ erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -\frac{1}{2t} + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{2t}{1-2ct}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt

$$u(1) = \frac{2}{1-2c} \stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad 2 = 4 - 8c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{4}.$$

Damit ist

$$u(t) = \frac{2t}{1-t/2}$$

und die Lösung ist definiert für $t \in (1, 2)$.

(b) Die Gleichung hat die Form $u' = \frac{1}{u} \cdot \mathrm{e}^t$. Die Funktion $g(u) = 1/u$ hat keine Nullstellen. Wir erhalten die allgemeine Lösung:

$$\int u\mathrm{d}u = \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = \mathrm{e}^t + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{2\mathrm{e}^t + 2c}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt

$$u(0) = \pm\sqrt{2+2c} \stackrel{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Damit ist

$$u(t) = \sqrt{2\mathrm{e}^t + 2}$$

und da $2\mathrm{e}^t + 2 > 0$ für alle $t > 0$, ist die Lösung für alle $t > 0$ definiert.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Lösung von $u' = Au$.

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von $u' = Au$ und prüfen Sie diese auf Stabilität.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom lautet
$$p(\lambda) \;=\; \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 \;=\; \lambda^2 + 5\lambda \;=\; \lambda(\lambda+5)$$
und die Eigenwerte sind
$$\lambda_1 = -5, \qquad \lambda_2 = 0.$$
Zugehörige Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = -5$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v^{[1]} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Zu $\lambda_2 = 0$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v^{[2]} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Damit ist ein Fundamentalsystem gegeben durch
$$\left\{ \mathrm{e}^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Da $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert ist, sind die Lösungen von $Au^* = 0$ die Vielfachen des zugehörigen Eigenvektors. D.h.
$$u^* = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ist für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Ruhelage. Da $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 = 0$ ein einfacher Eigenwert ist, sind alle diese Ruhelagen stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine reelle Matrix mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2\mathrm{i}, \quad \lambda_4 = -2\mathrm{i}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) Das System $u' = Au$ hat genau eine Ruhelage.

(2) Die Ruhelage $u^* = (0,0,0,0)^\top \in \mathbb{R}^4$ ist asymptotisch stabil.

(3) Es gibt eine π-periodische Lösung von $u' = Au$.

(4) Es gibt eine Lösung u von $u' = Au$ mit $\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$.

Hinweis: Es genügen kurze Begründungen, Sie brauchen keine langen Rechnungen.

Lösung.

(1) Die Aussage ist *wahr*. Da alle Eigenwerte ungleich Null sind, ist A regulär und die Gleichung $Au^* = 0$ hat die eindeutige Lösung $u^* = 0$.

(2) Die Aussage ist *falsch*. Wir haben $\mathrm{Re}(\lambda_3) = \mathrm{Re}(\lambda_4) = 0$ und λ_2, λ_3 sind einfache Eigenwert, d.h. u^* ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

(3) Die Aussage ist *wahr*. Da $\lambda_3 = 2\mathrm{i}, \lambda_4 = -2\mathrm{i}$ rein imaginäre Eigenwerte sind, gibt es eine Lösung der Form

$$u(t) = \cos(2t)a \; + \; \sin(2t)b \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^4.$$

(4) Die Aussage ist *falsch*. Seien $v^{[k]}$ jeweils Eigenvektoren zu λ_k, $1 \le k \le 4$. Dann hat jede Lösung die Form

$$u(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} v^{[1]} \; + \; c_2 \mathrm{e}^{-t} v^{[2]} \; + \; c_3 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} v^{[3]} \; + \; c_4 \mathrm{e}^{-2it} v^{[4]}$$

und somit

$$|u(t)| \le \mathrm{e}^{-2t} |c_1 v^{[1]}| \; + \; \mathrm{e}^{-t} |c_2 v^{[2]}| \; + \; |c_3 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} v^{[3]}| \; + \; |c_4 \mathrm{e}^{-2it} v^{[4]}|$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite gehen für $t \to \infty$ gegen Null und die letzten beiden sind beschränkt.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u''(t) - 2u'(t) + 2u(t) \;=\; 2\sin(t) - 4\cos(t).$$

(a) Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für das homogene Problem.

(b) Finden Sie eine partikuläre Lösung u_p des inhomogenen Problems.

Hinweis: Sie können den Ansatz $u_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ verwenden.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} \;=\; 1 \pm \sqrt{1-2} \;=\; 1 \pm \mathrm{i}.$$

Wir erhalten also ein komplexes Fundamentalsystem als

$$\{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t},\ \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\}$$

und ein reelles als $\{\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}),\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t})\}$.

Es gilt mit der Eulerschen Formel

$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \;=\; \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \;=\; \mathrm{e}^t(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)) \;=\; \mathrm{e}^t\cos(t) \;+\; \mathrm{i}\,\mathrm{e}^t\sin(t).$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist also

$$\{\mathrm{e}^t\cos(t),\ \mathrm{e}^t\sin(t)\}.$$

(b) Mit dem Ansatz $u_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&u_p''(t) - 2u_p'(t) + 2u_p(t) \\
=\;& (-a\cos(t) - b\sin(t)) \;-\; 2(-a\sin(t) + b\cos(t)) \;+\; 2(a\cos(t) + b\sin(t)) \\
=\;& (a-2b)\cos(t) \;+\; (2a+b)\sin(t) \;\overset{!}{=}\; 2\sin(t) - 4\cos(t).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a - 2b = -4, \qquad 2a + b = 2.$$

Addiert man das Zweifache der zweiten Gleichung zur Ersten, folgt $a = 0$ und somit $b = 2$. Also ist

$$u_p(t) = 2\sin(t).$$