Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Schmidt

SoSe 2025

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

27. August 2025

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CBI BV	ET	EUT GT	IN IIW	LUM WLUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils zuerst die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Lösen Sie dann die Anfangswertprobleme zu den jeweils gegebenen Anfangsdaten und geben Sie an, für welche t die zugehörigen Lösungen existieren.

(a) $2t^2u' = u^2$ für $t \geq 1$, $u(1) = 4$,

(b) $u'u = \mathrm{e}^t$ für $t \geq 0$, $u(0) = 2$.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Lösung von $u' = Au$.

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von $u' = Au$ und prüfen Sie diese auf Stabilität.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine reelle Matrix mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2\mathrm{i}, \quad \lambda_4 = -2\mathrm{i}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) Das System $u' = Au$ hat genau eine Ruhelage.

(2) Die Ruhelage $u^* = (0,0,0,0)^\top \in \mathbb{R}^4$ ist asymptotisch stabil.

(3) Es gibt eine π-periodische Lösung von $u' = Au$.

(4) Es gibt eine Lösung u von $u' = Au$ mit $\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$.

Hinweis: Es genügen kurze Begründungen, Sie brauchen keine langen Rechnungen.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u''(t) - 2u'(t) + 2u(t) \;=\; 2\sin(t) - 4\cos(t).$$

(a) Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für das homogene Problem.

(b) Finden Sie eine partikuläre Lösung u_p des inhomogenen Problems.

Hinweis: Sie können den Ansatz $u_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ verwenden.