Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt,
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = e^{2t} \cdot \sin(t), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace-Transformation.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe ohne Laplace-Transformation. Gehen Sie wie folgt vor.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

(ii) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und geben Sie eine Fundamentalmatrix für dieses System an.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Verwenden Sie die Methode der Variation der Konstanten für das zugehörige System.

(iv) Passen Sie die Koeffizienten an die Anfangsbedingungen an.

Hinweise:

- $\displaystyle\int e^{\alpha t} \cdot \sin(t)\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + 1}\,(\alpha \cdot \sin(t) - \cos(t)) + C\,.$
- Nutzen Sie Teil b) zur Wiederholung und Kombination von Techniken aus den letzten Blättern!

Lösung:

a) Transformation der AWA

$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s), \qquad u'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u(0) = sU(s),$

$u''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2U(s) - u'(0) = s^2U(s),$

$e^{2t} \cdot \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{(s-2)^2 + 1^2},$

Die AWA geht über in

$$(s^2 - s - 2)U(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \iff (s-2)(s+1)U(s) = \frac{1}{s^2 + -4s + 5}.$$

mit der Lösung

$$U(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)(s^2 - 4s + 5)}$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$U(s) = \frac{cs + d}{s^2 - 4s + 5} + \frac{b}{s-2} + \frac{a}{s+1}$$

liefert die Bedingung

$(cs + d)(s-2)(s+1) + b(s^2 - 4s + 5)(s+1) + a(s^2 - 4s + 5)(s-2) = 1\,.$

Für $s = 2 \,:\, b(1)(3) = 1 \implies b = \frac{1}{3}$.
Für $s = -1 \,:\, a(10)(-3) = 1 \implies a = -\frac{1}{30}$.
Für $s = 0 \,:\, d(-2)(1) + 5b - 10a = 1 \implies d = \frac{1}{2}$.
Koeffizientenvergleich für die Potenz s^3 liefert schließlich
$c + b + a = 0 \implies c = -\frac{3}{10}$.
Es gilt also

$$\begin{aligned}
U(s) &= \frac{-\frac{3}{10}s + \frac{1}{2}}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} + -\frac{1}{30}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{-\frac{3}{10}(s-2) - \frac{6}{10} + \frac{1}{2}}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} + -\frac{1}{30}\frac{1}{s+1} \\
&= -\frac{3}{10}\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{10}\frac{1}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{30}\frac{1}{s+1} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; -\frac{3}{10}e^{2t}\cos(t) - \frac{1}{10}e^{2t}\sin(t) + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{30}e^{-t} = u(t)\,.
\end{aligned}$$

b) (i) Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.
Die Nullstellen von P sind: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$.
Allgemeine Lösung: $u_h(t) = c_1 \cdot u^{[1]}(t) + c_2(t) \cdot u^{[2]}(t) = c_1 e^{-t} + c_2\, e^{2t}$.

(ii) Mit

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}\,' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

erhält man als äquivalentes System

$$\boldsymbol{u}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \cdot \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Als Fundamentalmatrix kann man

$$\boldsymbol{U}\,(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

wählen.

(iii) Ansatz: $u_p(t) = c_1(t) \cdot u^{[1]}(t) + c_2(t) \cdot u^{[2]}(t) = c_1(t) \cdot e^{-t} + c_2(t) \cdot e^{2t}$.
Einsetzen in Differentialgleichung liefert mit $b(t) =$ Inhomogenität der skalaren Dgl

$$\boldsymbol{U}\,(t)\,\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Addition der beiden Zeilen liefert

$$3e^{2t}\,c_2' = e^{2t} \cdot \sin(t) \implies c_2' = \frac{1}{3}\sin(t)\,.$$

Wir können also $\boxed{c_2(t) = -\frac{1}{3}\cos(t)}$ wählen.
Aus der ersten Zeile des Systems erhalten wir

$$e^{-t}c_1' + c_2' e^{2t} = e^{-t}c_1' + \frac{1}{3}\sin(t)\,e^{2t} = 0\,.$$

Also

$$c_1'(t) = -\frac{1}{3}\sin(t)\,e^{3t} \implies c_1(t) = -\int \frac{1}{3}\sin(t)\,e^{3t}\,dt\,.$$

Mit Hilfe des Hinweises folgt

$$c_1(t) = -\frac{1}{30}\, e^{3t}\, (3\sin(t) - \cos(t)) + C\,.$$

Eine partikuläre Lösung ist zum Beispiel

$$u_p(t) = -\frac{1}{30}\, e^{3t}\, (3\sin(t) - \cos(t))\, e^{-t} - \frac{1}{3}\cos(t)e^{2t} = -\frac{e^{2t}}{10}\, (\sin(t) + 3\cos(t))\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2\, e^{2t} - \frac{e^{2t}}{10}\, (\sin(t) + 3\cos(t))\,.$$

(iv) Die erste Anfangsbedingung $u(0) = 0$ liefert:
$c_1 + c_2 - \frac{1}{10}(3) = 0\,.$
Wegen
$u'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2\, e^{2t} - \frac{e^{2t}}{10}\, (2\sin(t) + 6\cos(t) + \cos(t) - 3\sin(t))$
liefert die zweite Anfangsbedingung $u'(0) = 0$
$u'(0) = -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10}\,(6+1) = 0\,.$
Addition der beiden Bedingungen ergibt:
$3c_2 - 1 = 0 \implies c_2 = \frac{1}{3}.$
Zum Beispiel aus der zweiten Bedingung erhalten wir
$c_1 = 2c_2 - \frac{7}{10} = -\frac{1}{30}$
und damit (natürlich wie in Teil a))

$$u(t) = -\frac{1}{30} e^{-t} + \frac{1}{3}\, e^{2t} - \frac{1}{10} e^{2t}\sin(t) - \frac{3}{10}\, e^{2t}\cos(t).$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare System $\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)$.

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt das charakteristische Polynom:

$P(\lambda) = (-1+\alpha-\lambda)[(2+\lambda)^2 - 4\alpha^2]$.

Eigenwerte : $\lambda_1 = -1+\alpha, \quad \lambda_2 = -2+2\alpha, \quad \lambda_3 = -2-2\alpha$

$\alpha > +1 \iff \lambda_1 > 0 \iff \lambda_2 = 2\lambda_1 > 0$.

$\alpha < -1 \iff \lambda_3 > 0$.

$-1 < \alpha < 1$: Realteil aller Eigenwerte negativ. Nulllösung ist asymptotisch stabil.

Für $\alpha < -1$ oder $\alpha > +1$ hat mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil. Die Nulllösung ist instabil.

$\alpha = -1 \implies \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 0$: Die Nulllösung ist stabil.

$\alpha = +1 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4$.

Eigenraum zum doppelten EW Null:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \iff v_2 = 0,\ v_3 = -v_1$$

Der Eigenraum des algebraisch zweifachen Eigenwertes Null hat die Dimension eins. Die Nulllösung ist instabil.

Aufgabe 3:

In einem Zweipopulationenmodell (Räuber–Beute–Modell) bezeichne $x(t)$ die Population der Beutespezies, $y(t)$ die der Räuberspezies zur Zeit t. Das zeitliche Wachstum der Populationen werde durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\begin{aligned} x' &= x\,(x - 1 - y) \\ y' &= y\,(2x - 3 - y). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte dieses Systems.

b) Untersuchen Sie jeden der Gleichgewichtspunkte auf seine Stabilität.

und unter

Lösung:

a) Für Gleichgewichtspunkte muss

$$\begin{aligned} x' &= x\,(x - 1 - y) = 0 \\ y' &= y\,(2x - 3 - y) = 0 \end{aligned}$$

gelten.
Also $x = 0$ oder $y = x - 1$
und $y = 0$ oder $y = 2x - 3$.
Wir erhalten folgende Punkte
$P_1 = (0,0)^T$
$x = 0$ und $y = 2x - 3$, also $P_2 = (0,-3)^T$
$y = 0$ und $y = x - 1$, also $P_3 = (1,0)^T$
$y = x - 1$ und $y = 2x - 3 \Longrightarrow x - 1 = 2x - 3 \Longleftrightarrow x = 2,\, y = 1$.
Also $P_4 = (2,1)^T$.

b) Da das obige System nichtlinear ist, müssen wir für die Stabilitätsuntersuchung die Linearisierung der rechten Seite

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x\,(x - 1 - y) \\ \\ y\,(2x - 3 - y). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x - xy \\ \\ 2xy - 3y - y^2. \end{pmatrix}$$

in den Punkten P_1 bis P_4 betrachten. Es ist

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 - y & -x \\ 2y & -3 + 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und damit

$JF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte -1 und -3.
P_1 ist asymptotisch stabil.

$JF(0,-3) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte 2 und 3.
P_2 ist instabil.

$JF(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte 1 und -1.
P_3 ist instabil.

$JF(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0!$

$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-7}{4}}$.

Da die Realteile beider Eigenwerte positiv sind, ist P_4 ebenfalls instabil.

Abgabe bis: 26.01.2024