Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Präsenzübung

Zur Verkürzung der Schreibweise verwenden wir das Doetsch-Symbol:

$$F(s) := \mathscr{L}f(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \iff f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$$

Folgende Korrespondenzen bzw. Zusammenhänge für $\mathrm{Re}\,(s) > \gamma$, die entweder in der Vorlesung bewiesen wurden oder völlig analog zum Vorgehen in der Vorlesung bewiesen werden können, dürfen benutzt werden. Es gelte stets $f(t) = 0, \forall t < 0$.

$f(t),\ t \geq 0$	F	γ
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\,(a)$
$e^{at}\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	0
$e^{at}\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	0

Wobei $h_a(t)$ für $a \geq 0$ wie folgt definiert ist: $\quad h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a \geq 0, \\ 0 & t < a. \end{cases}$

Falls $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$, dann gelten folgende Verschiebungssätze.

$I)$	$h_a(t)f(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa}F(s)$	Verschiebung im Originalraum Mult. mit exp-Fkt im Bildraum
$II)$	$e^{at}f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im Originalraum

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'' - 2u' + u = \sin(4t) + 2te^{-t}\,, \text{ für } t > 0\,, \qquad u(0) = 1\,,\, u'(0) = 0\,.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

Bitte belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

Berechnen Sie die Lösung der algebraischen Gleichung.

b) Es sei $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$ die Laplace-transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f : t \mapsto f(t)\,.$$

Bestimmen Sie $f(t)$.

Lösung:

a) $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s), \qquad u'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u(0) = sU(s) - 1,$

$u''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2U(s) - s - u'(0) = s^2U(s) - s,$

$\sin(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{4}{s^2+16}, \qquad t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{s^2}, \qquad e^{-t}t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{(s+1)^2}\,.$

Die AWA geht über in

$$(s^2 - 2s + 1)U + 2 - s = \frac{4}{s^2+16} + \frac{2}{(s+1)^2}\,.$$

mit der Lösung

$$U(s) = \frac{4}{(s^2+16)(s-1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2(s-1)^2} + \frac{s-2}{(s-1)^2}$$

b) Der PBZ-Ansatz

$\dfrac{as+b}{s^2+2s+1} + \dfrac{c}{s} = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$

liefert

$cs^2 + 2cs + c + as^2 + bs = 1 \iff c = -a\,,\ -2c = b\,,\ c = 1\,.$

$\dfrac{-s-2}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{-1}{(s+1)^2} - \dfrac{s+1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s}$

$\qquad = \dfrac{-1}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\, -te^{-t} - e^{-t} + 1\,.$

Aufgabe 2:

a) Untersuchen Sie für die folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}$ den stationären Punkt $(0,0)^T$ des linearen Systems $\boldsymbol{u}'(t) = A\,\boldsymbol{u}(t)$ auf Stabilität.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **iii)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Gegeben sei das lineare System

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -\gamma & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)\,.$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

Lösungsskizze:

a) **i)** $P(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm i\,.$
Es gibt mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil. Es handelt sich um einen instabilen stationären Punkt.

ii) $P(\lambda) = (-1-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1\,.$
Die Realteile aller Eigenwerte sind negativ. Es liegt ein asymptotisch stabiler stationären Punkt vor.

iii) $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i\,.$
Es gibt keinen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Eigenwerte mit Realteil Null sind einfach. Hier liegt ein stationären stabiler Punkt vor.

b) Charakteristisches Polynom : $P(\lambda) = (-\gamma - \lambda)[(3+\lambda)^2 - 9\,]\,.$
Eigenwerte : $\lambda_1 = -\gamma,\quad \lambda_2 = -3+3 = 0,\quad \lambda_3 = -3-3 = -6.$
$\gamma > 0 \iff \lambda_1,\, \lambda_3 < 0,\, \lambda_2 = 0$ einfacher EW: $\binom{0}{0}$ ist ein stabiler stationärer Punkt.
$\gamma < 0 \iff \lambda_1 > 0$: $\binom{0}{0}$ ist ein instabiler stationärer Punkt.
$\gamma = 0 \implies \lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = 0,\, \lambda_3 = -6$
Eigenraum zum doppelten EW Null:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \iff v_3 = v_1$$

Eigenvektoren:

$$v^{[1]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum des algebraisch zweifachen Eigenwertes Null hat die Dimension zwei. Die Nulllösung ist stabil.

Bearbeitungstermine: 22.01.-26.01.2024