Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt,
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Lösungsskizze:

a)

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -8 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)^2 + 16.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(-3-\lambda)^2 = -16 \iff -3-\lambda = \pm 4i \implies \lambda_{1,2} = -3 \pm 4i\,.$$

Den Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3-4i$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor mit $z_2 = -2iz_1$ erfüllt das System. Wir können also zum Beispiel $(1, -2i)^T$ wählen. Der konjugiert komplexe Vektor ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -3+4i$.

Damit erhalten wir das komplexe Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{(-3+4i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}^{[2]}(t) = e^{(-3-4i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Eine reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch $FM(t) = (\operatorname{Re}(\boldsymbol{z}^{[1]}(t)), \operatorname{Im}(\boldsymbol{z}^{[1]}(t)))$.

Wegen $\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{-3t}(\cos(4t) + i \cdot \sin(4t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(4t) + i \cdot \sin(4t) \\ 2i\cos(4t) - 2\sin(4t) \end{pmatrix}$

erhält man

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -2\sin(4t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ 2\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

und kann das Fundamentalsystem $FM(t) := \left(\boldsymbol{u}^{[1]}(t), \boldsymbol{u}^{[2]}(t)\right)$ wählen.

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet dann

$$\boldsymbol{u}_h(t) = c_1\, \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2\, \boldsymbol{u}^{[2]}(t)\,.$$

b) Zur Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} .$$

machen wir mit konstanten Zahlen a, b den Ansatz $\boldsymbol{u}^{[p]} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -3a + 2b = -20 & \iff -9a + 6b = -60 \\ -8a - 3b = -20 & \implies -16a - 6b = -40, \end{cases}$$

Addition der letzten Gleichungen ergibt $-25a = -100$, also $a = 4$.
Einsetzen von a in eine der Gleichungen ergibt $b = -4$.
$\boldsymbol{u}^{[p]}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist also eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}^{[p]}(t) = c_1 \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2 \boldsymbol{u}^{[2]}(t) + \boldsymbol{u}^{[p]}(t) , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{u}'(t) \;=\; \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u}\,(t).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

b) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{u}\,(t)$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$\boldsymbol{u}\,(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für diese Lösung $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{u}\,(t)$.

c) Konvergiert die Lösung des Systems aus Teil a) bei beliebigen Anfangsbedingungen für $t \to \infty$ gegen Null? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung :

a) Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1).$$

$P(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1\,.$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -2:$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 + 2v_2 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Zeile $-2\times$ 2. Zeile: $-3v_2 = 0\,.$

Einsetzen von $v_2 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_3 = -v_1\,.$

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[1]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_2 = -1:$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zeile $v_3 = 0\,.$

Einsetzen von $v_3 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_2 = -v_1\,.$

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\lambda_3 = 1:$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zeile $v_3 = 0$.

Einsetzen von $v_3 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_2 = v_1$.

Wir können also zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[3]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\boldsymbol{u}^{[3]}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen.

Die allgemeine Lösung ist: $\boldsymbol{u}(t) = c_1\, \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2\, \boldsymbol{u}^{[2]}(t) + c_3\, \boldsymbol{u}^{[3]}(t)$.

b)

$$\boldsymbol{u}(0) = c_1\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ \quad -c_2 + c_3 = -1 \\ \qquad -c_1 = -2 \Rightarrow c_1 = 2 \end{cases}$$

Neues System: $\begin{cases} c_2 + c_3 = 1 \\ -c_2 + c_3 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$.

Addition der ersten beiden Zeilen des ergibt: $c_3 = 0$ und damit folgt $c_2 = 1$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet:

$$\boldsymbol{u}(t) = 2 \cdot \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = 2e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Nein, die Lösung aus a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= c_1 \cdot \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2 \cdot \boldsymbol{u}^{[2]}(t) + c_3 \boldsymbol{u}^{[3]}(t) \\ &= c_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

konvergiert nicht für beliebige Anfangswerte gegen Null. Sie konvergiert genau dann gegen die Nulllösung, wenn die Anfangswerte so beschaffen sind, dass c_3 verschwindet!

Aufgabe 3:

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) \;=\; 0.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes: $u_0(t) = t^k$ eine Lösung der Differentialgleichung .

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsansatzes $\hat{u}(t) = u_0(t){\cdot}w(t)$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

c) Berechnen Sie die Lösung der Randwertaufgabe

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) \;=\; 0, \qquad 1 < t < e^{\frac{1}{3}}, \qquad u(1) = 0,\; u(e^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

d) Können Sie auch eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe berechnen?

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) \;=\; 0, \qquad 1 < t < e^{\frac{1}{3}}, \qquad u(1) = 0,\; u'(e^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

Lösung:

a) Der Ansatz $u_0(t) = t^k$ liefert für $t \neq 0$

$$k(k-1) + 7k + 9 \;=\; k^2 + 6k + 9 \;=\; (k+3)^2 \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Wir erhalten (bis auf skalare Vielfache) nur eine Lösung $u_0(t) = t^{-3}$. Da der Lösungsraum die Dimension zwei hat, erhalten wir so also kein Fundamentalsystem.

b) Einsetzen des Reduktionsansatzes $\hat{u}(t) = u_0(t) \cdot w(t)$ in die Differentialgleichung ergibt wie in der Vorlesung

$$\begin{aligned}
& & (u_0w)'' + \frac{7}{t}(u_0w)' + \frac{9}{t^2}(u_0w) = 0\\
&\Rightarrow & (u_0''w + 2u_0'w' + u_0w'') + \frac{7}{t}(u_0'w + u_0w') + \frac{9}{t^2}(u_0w) = 0\\
&\Rightarrow & u_0w'' + (2u_0' + \frac{7}{t}u_0)w' + \underbrace{(u_0'' + \frac{7}{t}u_0' + \frac{9}{t^2}u_0)}_{=0}w = 0\\
&\Rightarrow & t^{-3}w'' + (-6t^{-4} + \frac{7}{t}t^{-3})w' = 0 \qquad \stackrel{t\neq 0}{\Longleftrightarrow} w'' + \frac{1}{t}w' = 0\\
&\stackrel{y=w'}{\Longrightarrow} & y' = -\frac{1}{t}y.
\end{aligned}$$

Dies ist eine separierbare Differentialgleichung für $y(t)$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln(|y|) = \; -\ln(|t|) + k \Longrightarrow y(t) = \frac{c}{t} = w'(t)$$

$$w(t) = c\ln(t) + \tilde{c} \qquad \text{und damit zum Beispiel } w(t) = \ln(t)$$

Mit diesem w ergibt unser Ansatz $\hat{u}(t) = w(t)u_0(t) = \frac{\ln(t)}{t^3}$.

Die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = \; c_1\frac{1}{t^3} \; + c_2\frac{\ln(t)}{t^3}, \qquad\qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Die Randbedingungen verlangen:

$u(1) = c_1 \frac{1}{1^3} + c_2 \frac{\ln(1)}{1^3} = c_1 = 0 \Longrightarrow u(t) = c_2 \frac{\ln(t)}{t^3}$

und

$$u(e^{\frac{1}{3}}) = c_2 \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3} = c_2 \frac{\frac{1}{3}\ln(e)}{e^1} = 1 \Longrightarrow c_2 = 3e^1$$

Damit erhält man die eindeutige Lösung $u(t) = 3e \frac{\ln(t)}{t^3}$.

d) Aus $u(1) = 0$ folgt wieder $c_1 = 0$ und damit $u(t) = c_2 \frac{\ln(t)}{t^3}$, also

$u'(t) = c_2 \left(\frac{1}{t^4} - 3\frac{\ln(t)}{t^4} \right) = \frac{c_2}{t^4} \left(1 - 3\ln(t)\right)$.

Unabhängig vom Wert von c_2 erhält man somit $u'(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{c_2}{t^4} \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 0$.

Die vorgegebene Randbedingung $u'(e^{\frac{1}{3}}) = 1$ kann nicht erfüllt werden. Die Randwertaufgabe hat keine Lösung.

Abgabe bis: 12.01.2024