Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzübung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die Matrizen

$$\boldsymbol{A}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{[2]} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{[3]} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

jeweils ein reelles Fundamentalsystem des Lösungsraums von

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}^{[k]}\, \boldsymbol{y}(t), \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Lösung:

$\boldsymbol{A}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte der Systemmatrix $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ können auf der Diagonalen abgelesen werden.

Einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einen Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem $\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boldsymbol{A}^{[2]} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte der Systemmatrix $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 3$ können auf der Diagonalen abgelesen werden.

Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 3$ müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v_2 = 0$$

Es gibt also nur eine Eigenvektorrichtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir benötigen einen Hauptvektor

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t}(t\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \right\} = \left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\boldsymbol{A}^{[3]} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix $\lambda_1 = 3 = \lambda_2 = 3$ können wieder auf der Diagonalen abgelesen werden.

Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 3$ müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können also zwei beliebige linear unabhängige Eigenvektorrichtungen wählen und erhalten zum Beispiel mit den kanonischen Einheitsvektoren das Fundamentalsystem

$$\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\boldsymbol{A}^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix erhalten wir aus der Bedingung $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^2 + 9 = 0$.

Es gilt $\lambda_1 = -3i$ und $\lambda_2 = 3i$.

Den Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3i$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3i & 3 \\ -3 & 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor mit $z_1 = iz_2$ erfüllt das System. Wir können also zum Beispiel $(i, 1)^T$ wählen. Der konjugiert komplexe Vektor ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3i$.

Damit erhalten wir das komplexe Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{3it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}^{[2]}(t) = e^{-3it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch $\left\{ \mathrm{Re}(\boldsymbol{z}^{[1]}(t)), \mathrm{Im}(\boldsymbol{z}^{[1]}(t)) \right\}$.

$$\text{Mit} \quad \boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{3it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\cos(3t) + \sin(3t) \\ \cos(3t) + i\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Ergibt sich das Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{u}' = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \geq 0.5$$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\boldsymbol{U}(t) := \begin{pmatrix} t^{-2} & t \\ -2t^{-2} & t \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe.

c) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $\boldsymbol{u}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\det(\boldsymbol{U}(t)) = t^{-1} + 2t^{-1} \neq 0 \qquad \forall t \geq 0.5.$$

Also bilden die Funktionen

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \begin{pmatrix} t^{-2} \\ -2t^{-2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem, sofern sie Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Es gilt

$$\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} \frac{-2}{t^3} & \frac{4}{t^3} \end{pmatrix}^T$$

$$\frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ \frac{-2}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} \frac{-2}{t^2} \\ \frac{4}{t^2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1$ ist also eine Lösung der homogenen Aufgabe. Für $\boldsymbol{u}_2$ rechnet man analog

$$\boldsymbol{u}_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_2$ ist also auch eine Lösung der homogenen Differentialgleichung , und damit ist $\boldsymbol{U}(t)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems. [**4 Punkte**]

b) Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Aufgabe machen wir den Ansatz $\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$ (Variation der Konstanten). Dies eingesetzt in die Differentialgleichung liefert die Bedingung

$$\boldsymbol{U}(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t^{-2} & t \\ -2t^{-2} & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1'(t)}{t^2} + tc_2'(t) \\ \frac{-2c_1'(t)}{t^2} + tc_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{3c_1'(t)}{t^2} \\ \frac{-2c_1'(t)}{t^2} + tc_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ -2t + tc_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftarrow \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^{-2} & t \\ -2t^{-2} & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{t^4}{4} \\ 3t \end{pmatrix} = t^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe lautet also

$$\boldsymbol{u}(t) = k_1 \begin{pmatrix} t^{-2} \\ -2t^{-2} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

c) Einsetzen der Anfangswerte liefert :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + \frac{13}{4} \\ -2k_1 + k_2 + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow k_1 = \frac{1}{12},\ k_2 = -\frac{7}{3}.$$

Bearbeitung: 08.01-12.01.2024.