Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung

$$u^{(4)}(t) + a_3 u^{'''}(t) + a_2 u^{''}(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0 \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) eine Basis/ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 := \left\{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = e^{5t},\, u_3(t) = e^{9t}\right\}$.

b) $M_2 := \left\{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = e^{it},\, u_3(t) = e^{2t},\, u_4(t) = e^{2it}\right\}$.

c) $M_3 := \left\{u_1(t) = 1,\, u_2(t) = t,\, u_3(t) = e^{2t},\, u_4(t) = e^{-2t}\right\}$.

d) $M_4 := \left\{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = \sin(2t),\, u_3(t) = e^{-2it},\, u_4(t) = e^{2it}\right\}$.

Lösung: (1+1+1+2 Punkte)

a) Da der Lösungsraum die Dimension vier hat, kann M_1 kein Fundamentalsystem für (1) sein.

b) Komplexe Lösungen linearer Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf! Daher kann M_2 kein Fundamentalsystem für (1) sein.

c) M_3 ist ein Fundamentalsystem für (1) mit passenden Koeffizienten.

Nicht von den Studierenden verlangt: Das charakteristische Polynom wäre
$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$, die Differentialgleichung also $u^{''''}(t) - 4u^{''}(t) = 0$.

d) M_4 kann kein Fundamentalsystem sein. Denn es gilt zum Beispiel:

$e^{2it} - e^{-2it} = 2i\sin(2t)$. Der durch die Funktionen aus M_4 aufgespannte Raum hat nur die Dimension drei.

Aufgabe 2)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u''(t) + 9u(t) = b(t)$$

a) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für die Inhomogenitäten
i) $b(t) = 5e^{-t}$, **ii)** $b(t) = 5\sin(2t)$, **iii)** $b(t) = 5\sin(3t)$.

c) Bestimmen Sie die Lösungen der zugehörigen Anfangswertaufgaben für die Anfangswerte

$$u(0) = u'(0) = 0\,.$$

Prüfen Sie jeweils, ob die Lösungen für $t \geq 0$ beschränkt sind, und geben Sie wenn möglich jeweils obere Schranken für $|u(t)|,\ t \geq 0$ an.

Lösung:

a) Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 + 9 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$.
Basis des Lösungsraums: $\{z^{[1]}(t) = e^{3it}\,, z^{[2]}(t) = e^{-3it}\}$.
Mit $u_1(t) := \mathrm{Re}\,(z^{[1]}(t)) = \dfrac{z^{[1]}(t) + z^{[2]}(t)}{2} = \cos(3t)$
und $u_2(t) := \mathrm{Im}\,(z^{[1]}(t)) = \dfrac{z^{[1]}(t) - z^{[2]}(t)}{2i} = \sin(3t)$

erhält man eine reelle Basis des Lösungsraums und die allgemeine Lösung

$$u_h(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\,.$$

b) **i)** $b(t) = 5e^{-t}$. Ansatz: $u_p(t) = k\cdot e^{-t}$.
Einsetzen in Differentialgleichung liefert

$$k\cdot e^{-t} + 9k\cdot e^{-t} \overset{!}{=} 5\cdot e^{-t} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

$$u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

ii) $b(t) = 5\sin(2t)$. Ansatz: $u_p(t) = \alpha\cdot\cos(2t) + \beta\cdot\sin(2t)$.
Alternativ $b(t) = \frac{5}{2i}(e^{2it} + e^{-2it})$. Ansatz: $u_p(t) = c_1e^{2it} + c_2e^{-2it}$.
Einsetzen des reellen Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$-4\alpha\cdot\cos(2t) - 4\beta\cdot\sin(2t) + 9\alpha\cdot\cos(2t) + 9\beta\cdot\sin(2t) \overset{!}{=} 5\sin(2t) \Longrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1\,.$$

$$u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \sin(2t).$$

iii) $b(t) = 5\sin(3t) = \frac{5}{2i}(e^{3it} + e^{-3it})$

Da $\sin(3t)$ die homogene Differentialgleichung löst, machen wir den Ansatz:

$u_p(t) = t(\alpha \cdot \cos(3t) + \beta \cdot \sin(3t))$.

Alternativer Ansatz: $u_p(t) = t(c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it})$.

Dann gilt:

$u_p'(t) = (\alpha \cdot \cos(3t) + \beta \cdot \sin(3t)) + t(-3\alpha \cdot \sin(3t) + 3\beta \cdot \cos(3t))$.

$u_p''(t) = (-6\alpha \cdot \sin(3t) + 6\beta \cdot \cos(3t)) + t(-9\alpha \cdot \cos(3t) - 9\beta \cdot \sin(3t))$.

Einsetzen in Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} & u_p'' + 9u_p \\ &= -6\alpha \cdot \sin(3t) + 6\beta \cdot \cos(3t) + t(-9\alpha \cdot \cos(3t) - 9\beta \cdot \sin(3t)) + 9t(\alpha \cdot \cos(3t) + \beta \cdot \sin(3t)) \\ &= -6\alpha \cdot \sin(3t) + 6\beta \cdot \cos(3t) \stackrel{!}{=} 5\sin(3t) \Rightarrow \beta = 0,\ -6\alpha = 5, \Rightarrow u_p(t) = -\frac{5}{6}t\cos(3t). \end{aligned}$$

$$u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{5}{6}t\cos(3t)$$

.

c) **i)** $b(t) = 5e^{-t}$, $\qquad u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \frac{1}{2}e^{-t}$.

$u(0) = c_1 + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$.

$u'(0) = 3c_2\cos(0) - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{6}$

$$u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \frac{1}{2}e^{-t} = -\frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

$$|u(t)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

ii) $b(t) = 5\sin(2t)$, $\qquad u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \sin(2t)$.

$u(0) = c_1 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_1 = 0$.

$u'(0) = 3c_2\cos(0) + 2\cos(0) = 3c_2 + 2 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_2 = -\frac{2}{3}$

$$u(t) = -\frac{2}{3}\sin(3t) + \sin(2t).$$

$$|u(t)| \leq |c_1| + |c_2| + 1 = \frac{5}{3}, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

iii) $h(t) = 5\sin(3t)$, $\qquad u(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{5}{6}t\cos(3t)$.

$u(0) = c_1 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_1 = 0$.

$u'(0) = 3c_2\cos(0) - \frac{5}{6}\cos(0) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow c_2 = \frac{5}{18}$

$$u(t) = \frac{5}{18}\sin(3t) - \frac{5}{6}t\cos(3t).$$

Hier erhält man zum Beispiel für $t_k = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$

$$u(2k\pi) = c_2\sin(6k\pi) - \frac{5}{6}(2k\pi)\cos(6k\pi) = -\frac{5k\pi}{3}.$$

Und damit $\lim\limits_{k\to\infty} |u(2k\pi)| = -\infty$.

Die Lösung ist nicht beschränkt (Resonanzfall).

Aufgabe 3) Kür/Etwas anspruchsvoller.

Gesucht ist eine partikuläre Lösung u_p der inhomogenen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_0[u] := \sum_{k=0}^{m} a_k u^{(k)}(t) = b(t) = b_0 e^{\alpha t}, \qquad a_m = 1, a_k \in \mathbb{R},\, 0 \neq b_0 \in \mathbb{R},\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u_p(t) = Be^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ genau dann zum Erfolg führt, wenn α keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P_0(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k.$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u_p(t) = Bte^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ zum Erfolg führt, wenn α eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P_0[\lambda] := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k.$$

ist.

Tipp: Nutzen Sie die Faktorisierung aus Seite 40 der Vorlesung.

c) Sei nun α eine l-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$. Also

$$P_0(\lambda) = P_l(\lambda)(\lambda - \alpha)^l,\ P_l(\alpha) \neq 0$$

und

$$\mathcal{L}_0[u] := \mathcal{L}_l\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^l u\right].$$

Zeigen Sie, dass $u_p(t) := Bt^l e^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ ein geeigneter Ansatz für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist.

Tipps:

Definieren Sie P_j bzw. $\mathcal{L}_j$ über

$P_0(\lambda) = P_j(\lambda)(\lambda - \alpha)^j$, $\mathcal{L}_0[u] = \mathcal{L}_j\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^j u\right]$, $\qquad j = 0, 1, 2, \ldots, l.$

α ist $(l - j)-$ fache Nullstelle von P_j. Insbesondere keine Nullstelle von P_l.

Zeigen Sie

$$\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-j)!} B \mathcal{L}_j[t^{l-j} e^{\alpha t}]$$

mittels Induktion und unter Ausnutzung der Faktorisierungsmethode aus Seite 40 der Vorlesung.

Lösung:

a) Zu erfüllen ist $\mathcal{L}_0[Be^{\alpha t}] = b_0 e^{\alpha t}$ mit vorgegebenem $b_0 \neq 0$.

$\mathcal{L}_0[Be^{\alpha t}] = BP_0(\alpha)e^{\alpha t} \stackrel{!}{=} b_0 e^{\alpha t}$

Diese Gleichung ist genau dann (mit $B = \frac{b_0}{P_0(\alpha)}$) erfüllbar, wenn $P_0(\alpha) \neq 0$.

b) Ist α einfache Nullstelle von P_0, so gilt

$$P_0(\lambda) = P_1(\lambda)(\lambda - \alpha), \qquad P_1(\alpha) \neq 0$$

und

$$\mathcal{L}_0[u] := \mathcal{L}_1\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) u\right], \qquad \mathcal{L}_1[e^{\alpha t}] \neq 0.$$

Zu erfüllen ist

$$\mathcal{L}_0[Bte^{\alpha t}] = \mathcal{L}_1\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^1 Bte^{\alpha t}\right] = \mathcal{L}_1[Be^{\alpha t} + \alpha Bte^{\alpha t} - \alpha Bte^{\alpha t}] = B\mathcal{L}_1[e^{\alpha t}] = B\, P_1(\alpha)e^{\alpha t} \stackrel{!}{=} b_0 e^{\alpha t}.$$

Dies ist für $B = \frac{b_0}{P_1(\alpha)}$ erfüllt.

c) Sei α l-fache Nullstelle von P_0. P_j und $\mathcal{L}_j$ sein wie oben definiert.

Behauptung

$$\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_j[t^{l-j}e^{\alpha t}], \qquad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Induktion: $j = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] &= \mathcal{L}_1\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) Bt^l e^{\alpha t}\right] \\ &= \mathcal{L}_1[B(lt^{l-1} + t^l\alpha - t^l\alpha)e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-1)!} B\mathcal{L}_1[t^{l-1}e^{\alpha t}].\end{aligned}$$

Voraussetzung: Für ein beliebiges $j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq l-1$ gelte:

$$\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_j[t^{l-j}e^{\alpha t}]$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] &= \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_j[t^{l-j}e^{\alpha t}] \\ &= \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_{j+1}\left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) t^{l-j}e^{\alpha t}\right] = \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_{j+1}[(l-j)t^{l-(j+1)} + \alpha t^{l-j} - \alpha t^{l-j})e^{\alpha t}] \\ &= \frac{l!}{(l-j)!} B\mathcal{L}_{j+1}[(l-j)t^{l-(j+1)}e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-(j+1))!} B\mathcal{L}_{j+1}[t^{l-(j+1)}e^{\alpha t}]\end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also für $j = 1, 2, \ldots l$. Insbesondere auch für $j = l$:

$$\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-l)!} B\mathcal{L}_l[t^{l-l}e^{\alpha t}] = l!B\mathcal{L}_l[e^{\alpha t}].$$

Da $\mathcal{L}_l[e^{\alpha t}] \neq 0$, können wir $B = \frac{b_0 e^{\alpha t}}{l!\mathcal{L}_l[e^{\alpha t}]}$ wählen und erhalten mit $u_p(t) = Bt^l e^{\alpha t}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung .

Abgabe bis: 15.12.2023