Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen

a) $u^{(3)} - 3u' - 2u = e^{-2t}$.

b) $u^{(3)} - 3u' - 2u = e^{2t}$.

c) $u^{(3)} - 3u' - 2u = te^{-2t}$.

d) $u^{(3)} - 3u' - 2u = 7e^{2t} - 5e^{-2t}$.

Hinweis : Sie können für die partikulären Lösungen der inhomogenen Aufgaben spezielle Ansätze verwenden.

Lösung:

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$u^{(3)} - 3u' - 2u = 0$$

Mit dem charakteristischen Polynom

$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$.

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Damit erhalten wir als Basis für den Lösungsraum: $u_1(t) = e^{-t}$, $u_2(t) = t\,e^{-t}$, $u_3(t) = e^{2t}$.

Zu berechnen ist noch jeweils eine partikuläre/spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen .

a) $u^{(3)} - 3u' - 2u = e^{-2t}$

Inhomogenität : (Polynom nullten Grades) $\cdot e^{\mu t}$ wobei μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Daher machen wir mit einer Konstanten $B \in \mathbb{R}$ den Ansatz

$$u_{p,1}(t) := B\,e^{-2t}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt die Bedingung

$$u^{(3)} - 3u' - 2u = e^{-2t}\,[-8(B) - 3(-2B) - 2B] = e^{-2t}$$

$$\Longrightarrow -4B = 1 \Longrightarrow u_{p,1} = -\frac{1}{4}\,e^{-2t}.$$

Allgemeine Lösung:

$$u(t) = u_{p,1}(t) + u_h(t) = -\frac{1}{4}\,e^{-2t} + (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}.$$

b) $u^{(3)} - 3u' - 2u = e^{2t}$

Inhomogenität : (Polynom nullten Grades) $\cdot e^{\mu t}$ wobei μ einfache Nullstelle des Charakteristischen Polynoms ist. Daher machen wir mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ den Ansatz

$$u_{p,2}(t) := at\,e^{2t}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt die Bedingung

$$u^{(3)} - 3\,u' - 2\,u = e^{2t}\left[(8at + 8a + 4a) - 3(2at + a) - 2(at)\right] = e^{2t}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \cdot t + 9a = 1 \Longrightarrow u_{p,2} = \frac{t}{9}\,e^{2t}\,.$$

Allgemeine Lösung:

$$u(t) = u_{p,2}(t) + u_h(t) = \frac{t}{9}\,e^{2t} + (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}\,.$$

c) $u^{(3)} - 3\,u' - 2\,u = te^{-2t}\,.$

Inhomogenität : (Polynom ersten Grades) $\cdot e^{\mu t}$ wobei μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Nach Seite 43 der Vorlesung lautet der Ansatz

$u_{p,3}(t) := (B_1 t^1 + B_0 t^0)\,e^{-2t}\,.$

Um die Schreibweise etwas einfacher zu machen wählen wir $u_{p,3}(t) := (at + b)\,e^{-2t}$.

$$\begin{aligned}
u_{p,3}(t) &:= (at + b)\,e^{-2t} \\
u'_{p,3}(t) &= (a - 2at - 2b)\,e^{-2t}, \\
u''_{p,3}(t) &= (-2a - 2a + 4at + 4b)\,e^{-2t} = (-4a + 4at + 4b)\,e^{-2t}, \\
u^{(3)}_{p,3}(t) &= (4a + 8a - 8at - 8b)\,e^{-2t} = (12a - 8at - 8b)\,e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt die Bedingung

$$u^{(3)} - 3\,u' - 2\,u = e^{-2t}\left[12a - 8at - 8b - 3(a - 2at - 2b) - 2(at + b)\right] = te^{-2t}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t^0 : & 12a - 8b - 3a + 6b - 2b = 0 \quad \Longrightarrow 9a - 4b = 0 \Longrightarrow b = \frac{9}{4}a \\ t^: & -8a + 6a - 2a = 1 \quad \Longrightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$u_{p,3} = \left(-\frac{t}{4} - \frac{9}{16}\right)e^{-2t}\,.$$

Allgemeine Lösung:

$$u(t) = u_{p,3}(t) + u_h(t) = -\frac{t}{4} - \frac{9}{16}\,e^{-2t} + (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}\,.$$

d) Wegen der Linearität des Problems erhält man eine partikuläre Lösung der neuen Aufgabe als eine Linearkombination der beiden partikulären $u_{p,1}(t)$ und $u_{p,2}(t)$. Die Allgemeine Lösung ist also

$$u(t) = u_{p,1}(t) + u_{p,2}(t) + u_h(t) = \frac{7}{9}\,te^{2t} + \frac{5}{4}\,e^{-2t} + (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}\,.$$

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$u^{(3)}(t) + u''(t) + 3u'(t) - 5u(t) = 0\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen:

i) $u^{(3)}(t) + u''(t) + 3u'(t) - 5u(t) = 10,$ **ii)** $u^{(3)}(t) + u''(t) + 3u'(t) - 5u(t) = e^t.$

Lösung:

a) Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$.
$\lambda_1 = 1$ ist eine Nullstelle von P . Polynomdivision ergibt
$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = (\lambda - 1)\left((\lambda+1)^2 + 4\right)$.
Die Nullstellen von P sind: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$.
Komplexes Fundamentalsystem:
$u_1(t) = e^t$,
$z_2(t) = e^{(-1+2i)t} = e^{-t}e^{2it} = e^{-t}\cos(2t) + ie^{-t}\sin(2t)$
$z_3(t) = e^{(-1-2i)t} = e^{-t}e^{-2it}\cdot = e^{-t}\cos(-2t) + ie^{-t}\sin(-2t) = e^{-t}\cos(2t) - ie^{-t}\sin(2t)$.

Mit

$$u_2(t) := \frac{z_2(t) + z_3(t)}{2} = \operatorname{Re}(e^{(-1+2i)t}) \text{ und } u_3(t) := \frac{z_2(t) - z_3(t)}{2i} = \operatorname{Im}(e^{(-1+2i)t})$$

erhalten wir eine reelle Basis des Lösungsraums:
$u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}\cdot\cos(2t)$, $u_3(t) = e^{-t}\cdot\sin(2t)$.
Allgemeine Lösung: $u(t) = c_1 e^t + c_2\, e^{-t}\cdot\cos(2t) + c_3\, e^{-t}\cdot\sin(2t)$.

b) Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist aus Teil a) bekannt. Für partikuläre Lösungen der inhomogenen Gleichungen machen wir spezielle Ansätze.

i) Inhomogenität: Polynom nullten Grades mal $e^{0\cdot t}$, wobei 0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.
Ansatz: $u_p =$ Polynom nullten Grades mal $e^{0\cdot t} = B$.
Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:
$-5B = 10 \iff u_p = B = -2$ $\quad u(t) = c_1 e^t + c_2\, e^{-t}\cdot\cos(2t) + c_3\, e^{-t}\cdot\sin(2t) - 2$.

ii) Inhomogenität: Polynom nullten Grades mal $e^{1\cdot t}$, wobei 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.
Ansatz: $u_p = t\cdot$ Polynom nullten Grades mal $e^{1\cdot t} = B\cdot t^1\cdot e^t$, so dass

$$u_p'(t) = B\cdot(1+t)\cdot e^t, \qquad u_p''(t) = B\cdot(2+t)\cdot e^t, \qquad u_p^{(3)}(t) = B\cdot(3+t)\cdot e^t,$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert
$Be^t\,[3 + t + 2 + t + 3 + 3t - 5t] = e^t \iff 8B = 1.$
$\Longrightarrow u_p(t) = \frac{te^t}{8}$ ist eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch
$u(t) = c_1 e^t + c_2\, e^{-t}\cdot\cos(2t) + c_3\, e^{-t}\cdot\sin(2t) + \frac{te^t}{8}$.

Bearbeitung: 11-15.12.2023