Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Differentialgleichungen für $u(t)$ ist exakt?

(i) $u + u' = 0$.

(ii) $(12tu + 3) + 6t^2 \cdot u' = 0$.

(iii) $2t(u^2 - t^2 - 1) + 2uu' = 0$.

(iv) $u^3 + e^t + 3tu^2u' = 0$.

b) Bestimmen Sie für die exakten Differentialgleichungen aus Teil a) jeweils ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

Lösung:

a) (i) $u + u' = 0$. Mit $f(t,u) = u$ und $g(t,u) = 1$ folgt $f_u = 1 \neq 0 = g_t$.
Die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

(ii) $(12tu + 3) + 6t^2 \cdot u' = 0$. Hier gilt: $f(t,u) = 12tu + 3$, $g(t,u) = 6t^2$,
und damit $f_u = 12t = g_t \implies$ Die Differentialgleichung ist exakt.

(iii) $2t(u^2 - t^2 - 1) + 2uu' = 0$. Mit $f(t,u) = 2t(u^2 - t^2 - 1)$ und $g(t,u) = 2u$ folgt $f_u = 4tu \not\equiv 0 = g_t$.
Die Differentialgleichung ist nicht exakt.

(iv) $u^3 + e^t + 3tu^2u' = 0$. Mit $f(t,u) = u^3 + e^t$ und $g(t,u) = 3tu^2$ folgt $f_u = 3u^2 = g_t$.
Die Differentialgleichung ist also exakt.

b) Wir bestimmen ein Potential Ψ zur Differentialgleichung aus Teil a)ii).
$(12tu + 3) + 6t^2 \cdot u' = 0$.

$f(t,u) = 12tu + 3,\ g(t,u) = 6t^2$,

$\Psi_t(t,u) = 12tu + 3 \implies \Psi(t,u) = 6t^2u + 3t + c(u) \Rightarrow$

$\Psi_u(t,u) = 6t^2 + 0 + c'(u) \stackrel{!}{=} g(t,u) = 6t^2$

$\Longleftarrow c'(u) = 0 \iff c(u) = k \iff \Psi(t,u) = 6t^2u + 3t + k$

Lösungen der Differentialgleichung erfüllen:
$\Psi(t,u) = 6t^2u + 3t + k = \tilde{K} \iff 6t^2u + 3t = K$.

Allgemeine Lösung: $u(t) = \dfrac{K - 3t}{6t^2}$ für $t \neq 0$.

Ein Potential zur Differentialgleichung aus a)iv) berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Psi_t &\overset{!}{=} u^3 + e^t && \Rightarrow \quad \Psi = tu^3 + e^t + c(u) \Rightarrow \\
\Psi_u &= 3tu^2 + c'(u) \overset{!}{=} 3tu^2 && \Rightarrow \quad c'(u) = 0 \Rightarrow \Psi(t,u) = tu^3 + e^t + c
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Lösungen der Differentialgleichung erfüllen
$\Psi(t,u) = tu^3 + e^t = C \ \Rightarrow$

$$u^3 = \frac{C - e^t}{t}$$

Allgemeine Lösung: $u = \left(\frac{C - e^t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 2t^3\,u'(t) = e^{-\frac{t^4}{2}} \cdot \sin(2t) \qquad u(0) = 2,\ u'(0) = 0.$$

Hinweis: Es genügt eine Integraldarstellung der Lösung.

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = (u(t))^{-3} = g(u(t)) \qquad u(0) = 2,\ u'(0) = 0.$$

Lösung:

a) Die Substitution $y(t) := u'(t)$ liefert die folgende lineare Differentialgleichung für y.

$$y'(t) + 2t^3\,y(t) = e^{-\frac{t^4}{2}} \cdot \sin(2t)\,.$$

Lösungsformel aus der Vorlesung mit $a(t) = -2t^3$, $b(t) = e^{-\frac{t^4}{2}} \cdot \sin(2t)$

$A'(t) = -2t^3$ zum Beispiel $A(t) = -\frac{t^4}{2}$

$e^{-A(t)} \cdot b(t) = e^{\frac{t^4}{2}} \cdot e^{-\frac{t^4}{2}} \cdot \sin(2t) = \cdot \sin(2t) = (B^*(t))'$.

Also zum Beispiel $B^*(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$.

$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) = e^{-\frac{t^4}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t) + C\right) = u'(t)$.

Der Anfangswert für u' liefert

$u'(0) = y(0) = \left(C - \frac{1}{2}\cos(0)\right) e^0 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Für die Lösung $u(t)$ erhalten wir somit

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\tau)\right) e^{-\frac{\tau^4}{2}}\,d\tau = 2 + \frac{1}{2}\int_0^t (1 - \cos(2\tau))\, e^{-\frac{\tau^4}{2}}\,d\tau\,.$$

b) $u''(t) = (u(t))^{-3} = g(u(t))$.

Für $u' \neq 0$ ist die Dgl. äquivalent zur Gleichung

$u'u'' = u'u^{-3}$

Hieraus erhält man $\displaystyle\int u'u''dt = \int u'u^{-3}dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + C$

Also: $\displaystyle u' = \pm\sqrt{2C - \frac{1}{u^2}}$.

Für $t = 0$ gilt $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$. Einsetzen in die Formel für u' liefert:

$$u'(0) = 0 = \pm\sqrt{2C - \frac{1}{u(0)^2}} = \pm\sqrt{2C - \frac{1}{4}} \Longrightarrow C = \frac{1}{8} \Longrightarrow u' = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u^2}}\,.$$

Trennung der Variablen ergibt:

$$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{\frac{u^2-4}{4u^2}} = \pm\frac{\sqrt{u^2-4}}{2u}$$

$$\int \frac{2udu}{\sqrt{u^2-4}} = \pm\int dt \Longleftrightarrow 2\sqrt{u^2-4} = \pm t + \tilde{C} \qquad \text{(Substitution } z = u^2 - 4\text{)}$$

Aus der Anfangsbedingung $u(0) = 2$ erhalten wir

$$2\sqrt{2^2-4} = \pm 0 + \tilde{C} \Longrightarrow \tilde{C} = 0 \Longrightarrow \sqrt{u^2-4} = \pm\frac{t}{2} \Longrightarrow u^2 - 4 = \frac{t^2}{4} \Longrightarrow u(t) = \pm\sqrt{4 + \frac{t^2}{4}}\,.$$

Wegen $u(0) = 2$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage.

Aufgabe 3:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge des Stoffes $S(t)$ zum Zeitpunkt t und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. Es seien

$V :=$ Volumen $\quad K_M :=$ Sättigungskonzentration,

$K_0 :=$ Anfangskonzentration $\quad S(t) :=$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt t,

$S_0 := S(0) =$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert),

$K_0 + \dfrac{S_0 - S(t)}{V} =$ Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt t,

$\gamma :=$ Proportionalitätskonstante.

a) Beschreiben Sie den Auflösungsprozess durch eine Differentialgleichung für S(t).

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Daten
$S_0 = 10$ kg, $V = 100$ Liter, $K_M = 0.25\,\text{kg/l}$, $K_0 = 0\,\text{kg/l}$, $\gamma = 4\,\text{l}/(\text{kg}\cdot\text{sek.})$.
Benutzen Sie die aus der Vorlesung für logistisches Wachstum bekannte Substitution $u = S^{-1}$.

Lösung:)(3+7 Punkte)

a) Nach Aufgabenstellung gilt für die in der Zeitspanne Δt aufgelöste Menge:

$$S(t) - S(t+\Delta t) = \gamma \cdot S(t)\left(K_M - K_0 - \frac{S_0 - S(t)}{V}\right)\Delta t,$$

wobei γ konstant ist. Also mit $C := K_M - K_0 - \frac{S_0}{V}$

$$S(t) - S(t+\Delta t) = \gamma \cdot S(t)\left(C + \frac{S(t)}{V}\right)\Delta t,$$

Der Prozess kann durch die Differentialgleichung

$$S'(t) = -\gamma \cdot S(t)\left(C + \frac{S(t)}{V}\right)$$

beschrieben werden.

b) Mit den gegebenen Zahlen ergibt sich $C := K_M - K_0 - \dfrac{S_0}{V} = 0.25 - 0 - \dfrac{10}{100}$

$$S'(t) = -4S(t)\left(0.15 + \frac{S(t)}{100}\right) = -\frac{1}{25}S(t)(15 + S(t)) = -\frac{3}{5}S(t) - \frac{1}{25}S^2(t).$$

Wie in der Vorlesung erhalten wir mit $y(t) = S^{-1}(t)$

$$y'(t) = \frac{3}{5}y(t) + \frac{1}{25}$$

Lösung der homogenen Aufgabe:

$$y_h' = \frac{3}{5}y_h \implies y_h = Ce^{\frac{3}{5}t}.$$

Da die Koeffizienten und die Inhomogenität konstant sind, kann man den Ansatz $y_p = \hat{c} \in \mathbb{R}$ machen und erhält $y_p = -\frac{1}{15}$.

Alternativ: Variation der Konstanten oder Lösungsformel aus Vorlesung 1.

Insgesamt also:

$$y(t) = Ce^{\frac{3}{5}t} - \frac{1}{15} \implies S(t) = y(t)^{-1} = \frac{15}{ce^{\frac{3}{5}t} - 1}$$

Aus dem Anfangswert $S(0) = 10$ erhält man schließlich $c = \frac{5}{2}$ und damit die eindeutige Lösung

$$S(t) = \frac{30}{5e^{\frac{3}{5}t} - 2}$$

Abgabe bis: 01.12.2023