Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzübung

Aufgabe 1)

Stellen Sie fest, welche der folgenden Differentialgleichungen separierbar, linear, Bernoullisch, Riccatisch oder eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung ist. Geben Sie gegebenenfalls jeweils Substitutionen an, die die Differentialgleichungen in separierbare oder lineare Differentialgleichungen überführen. Wie lauten die durch die Substitutionen erhaltenen neuen Differentialgleichungen.

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen, dürfen es aber gerne!

a) $(1 + e^{2t})u' = -2e^{2t}u$

b) $u' - 2t^2(u - 1) + tu(u - 2) = 1 - t - t^3$. Tipp: Es gibt eine Lösung $u_p(t) = \alpha t + \beta$.

c) $\cos(t)u' + \sin(t)u = -\cos^2(t)u$

d) $u - \frac{1}{t} - \frac{1}{u}u' = 0$

e) $u' = 2t(2t^2u^2 - 1)u$

f) $u - tu' = \dfrac{t^3}{u^2}$

Lösung:

a) $u' = \frac{-2e^{2t}}{1+e^{2t}}u$ ist separierbar und wird direkt gelöst. Man erhält $u = C/(1 + e^{2t})$.

b)
$$u' - 2t^2(u - 1) + tu(u - 2) = 1 - t - t^3 \iff u' - (2t^2 + 2t)u + tu^2 = 1 - t - 2t^2 - t^3.$$

Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit $a(t) = 2t^2 + 2t$ und $b(t) = -t$.
Ansatz $u_p = \alpha t + \beta$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$\alpha - (2t^2 + 2t)(\alpha t + \beta) + t(\alpha t + \beta)^2 = 1 - t - 2t^2 - t^3.$$

Koeffizientenvergleich liefert
$\alpha = \beta = 1$ also $u_p(t) = t + 1$.
Wir setzen nun $y = \frac{1}{u-u_p}$ und erhalten nach Vorlesung/HÜ für y die Dgl:

$$y' = -[a(t) + 2b(t)u_p(t)]y - b(t) \iff y' = -[2t^2 + 2t - 2t(t + 1)]y = t$$

Also $y'(t) = t$. Dies ist nicht nur eine lineare Differentialgleichung , sondern sogar eine direkt integrierbare Gleichung.
Wir erhalten $y(t) = \frac{t^2}{2} + c$.
Rücktransformation:

$$u = \frac{1}{y} + u_p = \frac{1}{\frac{t^2}{2} + c} + t + 1 = \frac{2}{t^2 + k} + t + 1$$

c) $\cos(t)u' + \sin(t)u = -\cos^2(t)u \Longleftrightarrow u' = [-\tan(t) - \cos(t)]\,u.$

Die Gleichung ist separierbar. Die Lösung $u = c\dfrac{\cos(t)}{e^{\sin(t)}}$ muss nicht angegeben werden.

d) $u - \frac{1}{t} - \frac{1}{u}u' = 0 \Longleftrightarrow u^2 - \frac{u}{t} - u' = 0 \Longleftrightarrow u' = -\frac{1}{t}u + u^2.$

Die Differentialgleichung ist Bernoullisch mit

$$\alpha = 2,\ a(t) = -\frac{1}{t},\ b(t) = 1.$$

Man substituiert $y = u^{-1}$ und erhält die neue Dgl.:

$$y' = -1 \cdot (-\frac{1}{t}y + 1) = \frac{1}{t}y - 1.$$

Diese ist linear mit der Lösung $y = ct - t\ln(t)$. Damit erhält man $u = \frac{1}{ct - t\ln(|t|)}$.

e) $u' = 2t(2t^2u^2 - 1)u = 4t^3u^3 - 2tu \Longleftrightarrow u' = -2tu + 4t^3u^3$
ist Bernoullisch mit

$$\alpha = 3,\ a(t) = -2t,\ b(t) = 4t^3.$$

Man substituiert $y = u^{-2}$ und erhält die lineare Differentialgleichung :

$$y' = -2 \cdot (-2ty + 4t^3) = 4ty - 8t^3.$$

Diese ist linear. mit der Lösung $y = ce^{2t^2} + 2t^2 + 1$. Eine partikuläre Lösung für die inhomogene Aufgabe erhält man z.B. durch einen polynomialen Ansatz. Für die ursprügliche Gleichung folgt

$$u = \left(ce^{2t^2} + 2t^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

f) $u' = \frac{u}{t} - \left(\frac{t}{u}\right)^2$ ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Die Substitution $y = \frac{u}{t}$ führt zur Differentialgleichung

$$y' = \frac{-y^{-2}}{t}.$$

Diese ist separierbar. Die Lösung kann man wie folgt berechnen:

$$\int y^2 dy = \int \frac{-dt}{t}$$
$$\frac{y^3}{3} = -\ln(t) + \tilde{C}$$
$$y = (-3\ln(t) + C)^{\frac{1}{3}}$$
$$u = t\,(-3\ln(t) + C)^{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 2)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) + 2u(t) - t\,u(t)^4 = 0.$$

Lösung 2:

Die Differentialgleichung ist Bernoullisch.

Mit $\alpha = 4$, $a(t) = -2$ und $b(t) = t$ und $y = u^{1-\alpha} = u^{-3}$ erhält man für y die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = (1-\alpha)(a(t)y(t) + b(t)) = -3(-2y(t) + t) = 6y(t) - 3t.$$

Variante 1) Variation der Konstanten

$y_h' = 6y_h \implies y_h(t) = e^{\int 6dt} = Ce^{6t}$.

Variation der Konstanten

$y_p(t) = C(t)e^{6t} \stackrel{\text{Dgl}}{\longrightarrow} C'(t)e^{6t} \stackrel{!}{=} -3t$

$$C(t) = \int -3te^{-6t}dt = \left[-3t\frac{e^{-6t}}{-6}\right] - \int -3\frac{e^{-6t}}{-6}dt = \frac{t}{2}e^{-6t} - \frac{1}{2}\int e^{-6t}dt$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t} + K.$$

Also zum Beispiel mit $K = 0$

$y_p(t) = C(t)e^{6t} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t} \cdot e^{6t} \implies y_p(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{12}$.

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{6t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{12}$.

Variante 2) Lösungsformel aus Vorlesung 1

$A'(t) = \hat{a}(t) = 6$ zum Beispiel $A(t) = 6t$.

Mit $\hat{b}(t) = -3t$ rechnen wir

$e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t) = e^{-6t} \cdot (-3t) = -3te^{-6t} = (B^*(t))'$.

$$B^*(t) = \int -3te^{-6t}dt = \left[-3t\frac{e^{-6t}}{-6}\right] - \int -3\frac{e^{-6t}}{-6}dt = \frac{t}{2}e^{-6t} - \frac{1}{2}\int e^{-6t}dt$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t} + K.$$

Die Wahl $B^*(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t}$ liefert

$y(t) = e^{6t}(B^*(t) + C) = e^{6t}\left((\frac{t}{2} + \frac{1}{12})e^{-6t} + C\right)$.

Wegen $y = u^{1-\alpha} = u^{-3}$ erhalten wir

$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = 1 - t + t^2 + u(t) - 2tu(t) + (u(t))^2.$$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u_p(t) = mt + k$.

Lösung: Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit $a(t) = 1 - 2t,\ b(t) = 1, c(t) = 1 - t + t^2$.

Einsetzen des Ansatzes $u_p = mt + k$ in die Differentialgleichung liefert

$$m \overset{!}{=} 1 - t + t^2 + mt + k - 2mt^2 - 2kt + m^2t^2 + 2mkt + k^2$$

Also

$0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + m \overset{!}{=} (1 - 2m + m^2) \cdot t^2 + (-1 + m - 2k + 2mk) \cdot t + (1 + k + k^2)$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$0 = (1 - 2m + m^2) = (1 - m)^2 \rightarrow m = 1$,

$0 = (-1 + m + 2mk - 2k) \rightarrow 0 = (-1 + 1 + 2k - 2k) = 0$,

und

$m = (1 + k + k^2) \rightarrow 0 = k(k + 1)$.

Wir können zum Beispiel $k = 0$ wählen und damit $u_p = t$.

Substitution: $y := \frac{1}{u - u_p} = \frac{1}{u - t}$

Damit erhalten wir nach Vorlesung:

$$y' = -[a(t) + 2u_p(t)b(t)]y(t) - b(t) = -[1 - 2t + 2t]y(t) - 1 = -y(t) - 1$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = -y$ ist inzwischen bekannt: $y_h(t) = ce^{-t}$.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann man raten $y_p(t) = -1$, durch den Ansatz $y_p(t) = \hat{c}$ bestimmen, mit der Formel aus der ersten Vorlesung berechnen, oder über Variation der Konstanten:

$y_p(t) := c(t)e^{-t} \overset{\text{DGL}}{\Longrightarrow} c'(t)e^{-t} = -1 \Longrightarrow c'(t) = -e^t \Longrightarrow c(t) = -e^t + C$

Also zum Beispiel (mit $C = 0$)): $y_p(t) = -e^t e^{-t} = -1.$

Und damit $y(t) = ce^{-t} - 1$.

Rücktransformation:

$y = \frac{1}{u - t} \Longrightarrow u - t = \frac{1}{y} = \frac{1}{ce^{-t} - 1} \Longrightarrow u(t) = t + \frac{1}{ce^{-t} - 1}.$

Bearbeitung: 27.11-01.12.2023.