Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = t + t(y(t))^2 \qquad \text{für } t > 0, \qquad y(0) = 1.$$

Auf welchem Intervall $I = [0, t^*)$ ist Ihre Lösung definiert?

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung.

$$y'(t) = e^{-2t} \cdot \sqrt[3]{y(t)}.$$

c) Welche Lösung ergibt sich in b) wenn der Anfangswert $y(0) = 1$ vorgegeben wird?

d) Welche Lösung ergibt sich in b) wenn der Anfangswert $y(0) = 0$ vorgegeben wird?

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung . Man rechnet
$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2) \iff \frac{dy}{1+y^2} = tdt.$ **(1 Punkt)**
Und damit
$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int tdt \iff \arctan(y(t)) = \frac{t^2}{2} + C.$
$\iff y(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + C\right).$ **(1 Punkt)**

$y(0) = \tan\left(\frac{0^2}{2} + C\right) \stackrel{!}{=} 1 \iff C = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **(1 Punkt)**

Wegen $\tan(\alpha + k\pi) = \tan(\alpha), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, kann man irgendein k zur Darstellung der Funktion wählen. Also zum Beispiel $y(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ **(1 Punkt)**

Die Lösung ist nur definiert für $\frac{t^2}{2} < \frac{\pi}{4}$. Die Tangens Funktion hat Pole für die Argumente $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$ **(1 Punkt)**

b) Es handelt sich wieder um eine separierbare Differentialgleichung .
$\frac{dy}{dt} = e^{-2t} \cdot \sqrt[3]{y(t)} \stackrel{(*)}{\iff} \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = e^{-2t}dt.$ **(1 Punkt)**
Und damit
$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int e^{-2t} dt \iff \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{e^{-2t}}{-2} + \tilde{C}$ **(1 Punkt)**

$\iff \sqrt[3]{y^2(t)} = C - \frac{e^{-2t}}{3} \qquad (C = \frac{2}{3}\tilde{C})$
Also $y(t) = \pm\sqrt{\left(C - \frac{e^{-2t}}{3}\right)^3}.$ **(1 Punkt)**

c) $y(0) = \pm\sqrt{\left(C - \frac{e^0}{3}\right)^3} = \pm\sqrt{\left(C - \frac{e^0}{3}\right)^3} \stackrel{!}{=} 1$
Lässt nur das positive Vorzeichen zu und liefert $C = \frac{4}{3}$. **(1 Punkt)**

d) $y(0) = \pm\sqrt{\left(C - \frac{e^0}{3}\right)^3} = \pm\sqrt{\left(C - \frac{e^0}{3}\right)^3} \stackrel{!}{=} 0$
Liefert $C = \frac{1}{3}$ aber keine Aussage über das Vorzeichen. **(1 Punkt)**
Wir kommen später auf dieses Problem zurück. Hier kann man schon festhalten, dass bereits die erste Umformung $(*)$ in Teil b) nur für $y \neq 0$ durchgeführt werden kann.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'(t) \;=\; f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma)$$

mit $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Substitution

$$u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma$$

auf eine separierbare Differentialgleichung transformiert werden kann.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; 1 + \frac{2}{t-y+4}, \qquad \text{für } t - y + 4 > 0\,.$$

c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2: (4+6 Punkte)

a)

$$u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma \Longrightarrow u' = \alpha + \beta y' \;=\; \alpha + \beta f(u)\,.$$

$$\frac{du}{\alpha + \beta f(u)} \;=\; dt\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

b) Aus Teil a) folgt mit $\alpha = 1,\, \beta = -1,\, \gamma = 4$ und $f(u) = 1 + \dfrac{2}{u}$

$$u' \;=\; 1 - \left(1 + \frac{2}{u}\right) = -\frac{2}{u}\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Damit erhält man

$$\int u\, du \;=\; -\int 2dt \Longrightarrow \frac{u^2}{2} \;=\; -2t + \tilde{c} \Longrightarrow u(t) = \pm\sqrt{c - 4t}\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Die Lösung ist natürlich nur für $c - 4t > 0$ definiert. Rücktransformation ergibt

$$y(t) = t + 4 \mp \sqrt{c - 4t}\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

c) Es gilt

$$y' = 1 \mp \frac{1}{2\sqrt{c-4t}} \cdot (-4) = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{c-4t}}$$

und

$$1 + \frac{2}{t-y+4} \;= 1 + \frac{2}{t - (t + 4 \mp \sqrt{c-4t}) + 4} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{c-4t}}\,. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Abgabe bis: 17.11.2023