Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzübung

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 3\sin(t)\,, \qquad y(0) = 0,\, y'(0) = 1,\, y''(0) = \frac{3}{10}.$$

a) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung ?

b) Handelt es sich um eine explizite Differentialgleichung ? Wenn nicht, geben Sie eine äquivalente explizite Differentialgleichung an.

c) Ist die Differentialgleichung linear?

d) Ist die Differentialgleichung homogen?

e) Schreiben Sie die Anfangswertaufgabe in eine äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung um.

Lösung:

a) Die Differentialgleichung hat die Ordnung drei.

b) Nein. Explizite Form:
$$y'''(t) = 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) + 3\sin(t)\,.$$

c) Ja.

d) Nein.

e) Mit
$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$$
erhält man als äquivalentes System
$$\boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}\,(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$
bzw.
$$\boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sin(t)) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}\,(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben

a)
$$y'(t) = \frac{1+\cos(t)}{(y(t))^2} \qquad \text{für } t>0, \qquad y(0) = 3.$$

b)
$$y - ty' = \frac{t^3}{y^2} \qquad \text{für } t>1, \qquad y(1) = 2.$$

Hinweis: Substituieren Sie $u(t) := \frac{y(t)}{t}$.

Lösung:

a) Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung . Für $y \neq 0$ rechnet man $\frac{dy}{dt} = \frac{1+\cos(t)}{y^2} \iff y^2 dy = (1+\cos(t))dt.$
Und damit
$\int y^2 dy = \int (1+\cos(t))dt \iff \frac{y^3}{3} = t + \sin(t) + C$

$\iff y(t) = \sqrt[3]{3t + 3\sin(t) + 3C}.$
$y(0) = \sqrt[3]{0 + 3\sin(0) + 3C} \stackrel{!}{=} 3 \iff C = 9\,.$
Also $y(t) = \sqrt[3]{3t + 3\sin(t) + 27}\,.$

b) Auflösen nach y' ergibt
$$y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{t}{y}\right)^2$$
Die Substitution $u(t) = \frac{y(t)}{t}$ führt die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{t}{y}\right)^2$ über in eine separierbare Differentialgleichung . Denn es gilt:
$y'(t) = (t \cdot u(t))' = u(t) + tu'(t)$ und damit verlangt die Differentialgleichung
$u(t) + tu'(t) \stackrel{!}{=} u(t) - \left(u^{-1}(t)\right)^2 \stackrel{t\neq 0}{\iff} u'(t) \stackrel{!}{=} \dfrac{u(t) - u^{-2}(t) - u(t)}{t}\,.$
Zu lösen ist also
$$u' = \frac{-u^{-2}}{t}$$
Diese Differentialgleichung ist separierbar. Die Lösung kann man wie folgt berechnen:
$$\begin{aligned} \int u^2 du &= \int \frac{-dt}{t} \\ \frac{u^3}{3} &= -\ln(t) + \tilde{C} \\ u &= (-3\ln(t) + C)^{\frac{1}{3}} \\ y &= t \cdot u = t\,(-3\ln(t) + C)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Anfangsbedingung:
$y(1) = 1 \cdot t\,(-3\ln(1) + C)^{\frac{1}{3}} \stackrel{!}{=} 2 \implies C = 8.$

Bearbeitung: 13.11-17.11.2023.