Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' - 2y = 4t$.

a) Zeigen Sie, dass $y_p(t) = -2t - 1$ die Differentialgleichung löst.

b) Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung . Zeigen Sie, dass $y := \tilde{y} - y_p$ die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' - 2y = 0$ löst.

c) Berechnen Sie Lösungen y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h' - 2y_h = 0$, zum Beispiel mit Hilfe der Formel aus der Seite 9 der Vorlesung.

d) Aus b) folgt, dass jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sich als Summe einer Lösung der homogenen Differentialgleichung und y_p schreiben lässt. Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' - 2y = 4t, \qquad y(0) = 2.$$

Lösung:

a) Einsetzen von $y_p(t) = -2t - 1$ in die Differentialgleichung ergibt:
$-2 - 2(-2t - 1) \;=\; -2 + 4t + 2 \;=\; 4t$.

b) Es gilt
$$y' - 2y = \;(\tilde{y}' - y_p') - 2(\tilde{y} - y_p) = \underbrace{(\tilde{y}' - 2\tilde{y})}_{4t} - \underbrace{(y_p' - 2y_p)}_{4t} \;=\; 0.$$

c) Die Lösungen y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h' - 2y_h = 0$ kann man erraten, nach der Formel auf Seite 5 der Vorlesung angeben oder nach Seite 9 der Vorlesung berechnen.

Mit den Bezeichnungen der Vorlesung gilt $a(t) = 2$ also

$A(t) = 2t + \hat{C}$ und damit $y_h(t) = e^{\hat{C}} e^{2t} \;=\; Ce^{2t}$.

d) Nach a) und b) erhalten wir $y(t) = -2t - 1 + Ce^{2t}$

Die Anfangsbedingung verlangt

$y(0) = \;0 - 1 + Ce^0 \;=\; C - 1 \;\overset{!}{=}\; 2 \Longrightarrow\; C = 3$.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist $y(t) = -2t - 1 + 3e^{2t}$.

Aufgabe 2:

Weisen Sie analog zur Vorgehensweise auf Seite 9 der Vorlesung die auf Seite 11 gegebene Darstellung

$$u(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C), \qquad \text{mit } A'(t) = a(t),\ (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\ C \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

für jede Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = a(t) \cdot u(t) + b(t)$$

nach. Dabei gelten die gleichen Voraussetzungen an a und b wie in der Vorlesung.

Tipp:
Zeigen Sie zunächst durch Einsetzen in die Differentialgleichung ,dass durch $(*)$ eine Lösung gegeben ist. Nehmen Sie nun umgekehrt an, dass Sie eine Lösung u haben, und zeigen Sie analog zur Vorgehensweise auf Seite 9 der Vorlesung, dass $e^{-A(t)}u(t) - B^*(t)$ konstant ist.

Lösung:

Zunächst gilt mit (*)

$$u'(t) = A'(t)e^{A(t)}(B^*(t) + C) + e^{A(t)}(B^*(t))' = a(t)\,\underbrace{e^{A(t)}(B^*(t) + C)}_{u(t)} + \underbrace{e^{A(t)}(e^{-A(t)} \cdot b(t))}_{b(t)} = a(t)u(t) + b(t).$$

Ist andererseits u eine Lösung der Differentialgleichung , also $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$ so gilt

$$\left(e^{-A(t)}u(t) - B^*(t)\right)' = -a(t)e^{-A(t)}u(t) + e^{-A(t)}u'(t) - (e^{-A(t)} \cdot b(t)) = e^{-A(t)} \cdot (u'(t) - a(t)u(t) - b(t)) = 0$$

Also $e^{-A(t)}u(t) - B^*(t) = C \iff u(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \cos(t) \cdot u(t) + te^{\sin(t)}, \qquad u(0) = 5.$$

Lösung:

Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 2) gilt $a(t) = \cos(t)$ und $b(t) = te^{\sin(t)}$.

Wir können also $A(t) = \sin(t)$ wählen und erhalten

$e^{-A(t)} \cdot b(t) = e^{-\sin(t)} \cdot te^{\sin(t)} = t = (B^*(t))'$.

Die Wahl $B^*(t) = \frac{t^2}{2}$ liefert

$u(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) = e^{\sin(t)}(\frac{t^2}{2} + C)$.

Die Anfangsbedingung $u(0) = 5$ verlangt

$u(0) = e^{A(0)}(B^*(0) + C) = e^{\sin(0)}(\frac{0^2}{2} + C) = 1 \cdot (0 + C) = 5 \Longrightarrow C = 5$.

Abgabe bis: 03.11.2023