Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani **WiSe 2023/24**

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzübung

Aufgabe 1:

Geben Sie an, welche der folgenden Differentialgleichungen linear sind und welche von zweiter Ordnung sind. Welche der linearen Aufgaben sind homogen und welche sind inhomogen?

a) $(y(t))^2 - (y'(t))^2 = 0\,.$

b) $y'(t) - t^2 y(t) = 0\,.$

c) $y'(t) - t^2 y(t) - e^{-t} = 0\,.$

d) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2\,.$

e) $y''(t) + 2y'(t) - y(t)^4 = 0\,.$

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen!

Lösung 1:

Die Differentialgleichungen aus b), c) und d) sind linear.

Die Differentialgleichung aus b) ist homogen. Die aus c) und d) sind inhomogen.

Die Differentialgleichungen aus d) und e) sind von zweiter Ordnung.

Aufgabe 2:

Prüfen Sie für die Differentialgleichungen b) und c) ob jede Linearkombination

$y(t) := c_1\hat{y}(t) + c_2\tilde{y}(t),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

zweier Lösungen

$\hat{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \hat{y}(t)$ und $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \tilde{y}(t)$

ebenfalls die Differentialgleichung löst.

Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung:

Zunächst liefert die Linearität des Ableitungsoperators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$

$$y'(t) = (c_1\hat{y}(t) + c_2\tilde{y}(t))' = c_1\hat{y}'(t) + c_2\tilde{y}'(t)\,.$$

Wenn $\tilde{y}$ und $\hat{y}$ Lösungen der Differentialgleichung b) sind, dann gelten die Gleichungen

$$\hat{y}'(t) = t^2\hat{y}(t) \qquad \text{und} \qquad \tilde{y}'(t) = t^2\tilde{y}(t)\,.$$

Also

$$y'(t) = c_1\hat{y}'(t) + c_2\tilde{y}'(t) = c_1\left(t^2\hat{y}(t)\right) + c_2\left(t^2\tilde{y}(t)\right) = t^2\left(c_1\hat{y}(t) + c_2\tilde{y}(t)\right) = t^2 y(t)\,.$$

Jede Linearkombinationen von Lösungen der Differentialgleichung b) löst also ebenfalls die Differentialgleichung b).

Wenn $\tilde{y}$ und $\hat{y}$ Lösungen der Differentialgleichung c) sind, dann gelten die Gleichungen

$$\hat{y}'(t) = t^2\hat{y}(t) + e^{-t} \qquad \text{und} \qquad \tilde{y}'(t) = t^2\tilde{y}(t) + e^{-t}\,.$$

Also

$$y'(t) = c_1\left(t^2\tilde{y}(t) + e^{-t}\right) + c_2\left(t^2\hat{y}(t) + e^{-t}\right) = t^2\left(c_1\tilde{y}(t) + c_2\hat{y}(t)\right) + (c_1 + c_2)e^{-t} = t^2 y(t) + (c_1 + c_2)e^{-t}\,.$$

y ist nur für $c_1 + c_2 = 1$ eine Lösung der Differentialgleichung .

Erklärung: Beliebige Linearkombinationen homogener linearer Differentialgleichungen sind wieder Lösungen der Differentialgleichung . Im inhomogenen Fall gilt das im allgemeinen nur für spezielle Linearkombinationen.

Aufgabe 3:

Prüfen Sie für die Differentialgleichung a) ob jede Linearkombination $y(t) := c_1\hat{y}(t)+c_2\tilde{y}(t)$ zweier Lösungen

$\hat{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \hat{y}(t)$ und $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \tilde{y}(t)$

ebenfalls die Differentialgleichung löst. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

Wenn $\tilde{y}$ und $\hat{y}$ Lösungen der Differentialgleichung a) sind, dann gelten die Gleichungen

$$(\hat{y}'(t))^2 = (\hat{y}(t))^2 \qquad \text{und} \qquad (\tilde{y}'(t))^2 = (\tilde{y}(t))^2\,.$$

Einsetzen von y in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
(y(t))^2 - (y'(t))^2 &= \left(c_1\hat{y}(t) + c_2\tilde{y}(t)\right)^2 - \left(c_1\hat{y}'(t) + c_2\tilde{y}'(t)\right)^2 \\
&= c_1^2\hat{y}(t)^2 + 2c_1c_2\hat{y}(t)\tilde{y}(t) + c_2^2\tilde{y}(t)^2 - \left(c_1^2\hat{y}'(t)^2 + 2c_1c_2\hat{y}'(t)\tilde{y}'(t) + c_2^2\tilde{y}'(t)^2\right) \\
&= c_1^2\underbrace{(\hat{y}(t)^2 - \hat{y}'(t)^2)}_{0} + 2c_1c_2(\hat{y}(t)\tilde{y}(t) - \hat{y}'(t)\tilde{y}'(t)) + c_2^2\underbrace{(\tilde{y}(t)^2 - \tilde{y}'(t)^2)}_{0} \\
&= 2c_1c_2 \cdot (\hat{y}(t)\tilde{y}(t) - \hat{y}'(t)\tilde{y}'(t)) \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist erfüllt, wenn c_1 oder c_2 gleich null sind, wir also keine echte Linearkombination, sondern nur ein Vielfaches einer der bekannten Lösungen haben. Achtung: Auch das muss nicht der Fall sein!. Vielfache von Lösungen nichtlinearer Gleichungen müssen keine Lösungen sein!

Gilt dagegen $c_1c_2 \neq 0$, hat man also eine echte Linearkombination von zwei verschiedenen Lösungen, so ist die Differentialgleichung nicht erfüllt, wenn zum Beispiel

$\hat{y}'(t) = \hat{y}(t) \qquad \text{und} \qquad \tilde{y}'(t) = -y(t)$ gelten.

Da die Differentialgleichung nichtlinear ist, kann man auch nicht erwarten, dass Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind.

Nicht von den Studierenden verlangt, aber vielleicht hilfreich für die Diskussion:

Tatsächlich sind $\hat{y}(t) = e^t$ und $\tilde{y}(t) = e^{-t}$ Lösungen, für $y = \hat{y} + \tilde{y}$ gilt aber zum Beispiel:

$$(y(t))^2 - (y'(t))^2 = (e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2 = (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) = 4 \neq 0\,.$$

Bearbeitung: 30.10-03.11.2023.