Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1,Hausaufgaben

(Wiederholung ausgewählter Themen aus Mathematik II)

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu 1:

Die Eigenwerte können in der Diagonale abgelesen werden.
Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -3: \qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \qquad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5: \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind $k \cdot \boldsymbol{v}^{[1]}, \hat{k} \cdot \boldsymbol{v}^{[2]}, \tilde{k} \cdot \boldsymbol{v}^{[3]}$ mit $k, \hat{k}, \tilde{k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weitere Eigenvektorrichtungen gibt es nicht. Es gilt $a(5) - g(5) = 1$

Hauptvektor der Stufe 1 zu $\lambda_3 = 5, \boldsymbol{v}^{[3]}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[4]} = \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (+\tilde{k}\, \boldsymbol{v}^{[3]})$$

Aufgabe 2: *Bitte üben Sie hier unbedingt die Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte und arbeiten Sie nicht nur mit der Regel von Sarrus!*

a) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix, $\lambda = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ und i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{\lambda} = a - ib$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{v}}$ ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu 2:

a) $\lambda \cdot \boldsymbol{v} = A \cdot \boldsymbol{v} \iff \overline{\lambda \cdot \boldsymbol{v}} = \overline{A \cdot \boldsymbol{v}} \iff \overline{\lambda} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{A} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = A \cdot \bar{\boldsymbol{v}}$

b)

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 + 9].$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Zum Eigenwert 1 errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 3 \\ 2 & 1-1 & 2 \\ -3 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \Longleftarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 2-3i errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 3i & 0 & 3 \\ 2 & 3i-1 & 2 \\ -3 & 0 & 3i \end{pmatrix} \boldsymbol{w} = 0 \iff \begin{cases} w_3 = -iw_1 \\ 2w_1 + (3i-1)w_2 - 2iw_1 = 0 \\ -3w_1 + 3i(-iw_1) = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Zeile rechnet man $w_2 = \dfrac{2(1-i)w_1}{1-3i}$.

Die Wahl $w_1 := 1 - 3i$ liefert den Eigenvektor:

$$w = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2-2i \\ -3-i \end{pmatrix}$$

Nach Teil a) ist $\bar{\boldsymbol{w}}$ ein Eigenvektor zu 2+3i.

Abgabe bis: 20.10.2023