Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzübung

Aufgabe 1:

Es sei $y(t)$ die Zahl der Feldmäuse in einem bestimmten Gebiet zum Zeitpunkt t. In einem sehr einfachen Modell wird angenommen, dass die Zunahme der Zahl der Mäuse pro Zeiteinheit proportional zur Zahl der Mäuse ist.

- Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, die näherungsweise die Entwicklung der Zahl der Mäuse in einem kleinen Zeitraum beschreibt.
- Beschreiben Sie die Entwicklung der Zahl der Mäuse mit Hilfe einer Differentialgleichung.
- Können Sie die Zahl der Mäuse zum Zeitpunkt $t = 10$ (natürlich abhängig vom Proportionalitätsfaktor) angeben?

  Welche Information fehlt Ihnen dazu?

Lösungsskizze:

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx \lambda y(t) \cdot \Delta t \iff \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y(t)\,.$$

Im Falle der Differenzierbarkeit von y erhält man

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lambda y(t)\,.$$

Wir kennen eine Funktion, die sich beim Ableiten nur um einen konstanten Faktor verändert, nämlich $y^*(t) = e^{\lambda t}$.

Jedes Vielfache von y^* hat ebenfalls diese Eigenschaft. Wir können also $y(t) = ke^{\lambda t}$ mit einer Konstanten k wählen.

Den Wert von y zu einem vorgegebenem Zeitpunkt können wir nicht bestimmen, ohne k zu kennen. Das ist auch logisch! Ohne eine Anfangspopulation zu kennen, können wir schlecht erwarten, aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf die Zahl der Mäuse zu irgendeinem späteren Zeitpunkt zu schließen. Hat man dagegen $y(0)$, zum Beispiel $y(0) = 50$, so folgt $k = 50$ und $y(10) = 50e^{10\lambda}$.

Aufgabe 2:

Gesucht seien Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$ mit

$$y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0\,,$$

also Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0\,.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = ke^{\lambda t}$, k, λ konstant, nicht identisch verschwindende Lösungen dieser Differentialgleichung.

Lösung:
Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt:

$$k\lambda^3 e^{\lambda t} + 2k\lambda^2 e^{\lambda t} - k\lambda^1 e^{\lambda t} - 2ke^{\lambda t} = 0$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$$k = 0 \implies y \equiv 0 \text{ (identisch verschwindende Lösung)}$$

oder $$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0\,.$$

Da die Summe der Koeffizienten verschwindet, ist $\lambda = 1$ eine Nullstelle des Polynoms.

Polynomdivision ergibt:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Man erhält also für $\lambda \in \{-2, -1, 1\}$ Lösungen

$y_1(t) = k_1 e^{-2t}$, $y_2(t) = k_2 e^{-t}$ und $y_3(t) = k_3 e^t$

der Differentialgleichung .

Die Konstanten k_1, k_2, k_3 können dann beliebig gewählt werden. Wobei man bei der Wahl Null natürlich die triviale Lösung $y \equiv 0$ erhält.

Hinweis für Tutoren: Die schnellen Studierenden kann man hier eventuell schon motivieren sich davon zu überzeugen, dass

- zum Beispiel $y_4 = y_1 + y_2$ und $y_5 = y_1 - y_3$ ebenfalls Lösungen sind.
- jede Linearkombination von Lösungen der Differentialgleichung auch eine Lösung ist.

Dabei unbedingt darauf hinweisen, dass die systematische Diskussion später in der Vorlesung erfolgt und nicht bei jeder Differentialgleichung Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind. Vielmehr zeichnet diese Eigenschaft die linearen Differentialgleichungen aus.

Bearbeitungstermine: 16.10.-20.10.2023