Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt,
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = e^{2t} \cdot \sin(t), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace-Transformation.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe ohne Laplace-Transformation. Gehen Sie wie folgt vor.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

(ii) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und geben Sie eine Fundamentalmatrix für dieses System an.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Verwenden Sie die Methode der Variation der Konstanten für das zugehörige System.

(iv) Passen Sie die Koeffizienten an die Anfangsbedingungen an.

Hinweise:

- $\displaystyle\int e^{\alpha t} \cdot \sin(t)\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + 1} \left(\alpha \cdot \sin(t) - \cos(t)\right) + C\,.$
- Nutzen Sie Teil b) zur Wiederholung und Kombination von Techniken aus den letzten Blättern!

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare System $\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)\,.$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

In einem Zweipopulationenmodell (Räuber–Beute–Modell) bezeichne $x(t)$ die Population der Beutespezies, $y(t)$ die der Räuberspezies zur Zeit t. Das zeitliche Wachstum der Populationen werde durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\begin{aligned} x' &= x\,(x - 1 - y) \\ y' &= y\,(2x - 3 - y). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte dieses Systems.

b) Untersuchen Sie jeden der Gleichgewichtspunkte auf seine Stabilität.

und unter

Abgabe bis: 26.01.2024