

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6, Hausaufgaben

### Aufgabe 1:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.
- Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

### Aufgabe 2)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}(t).$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.
- Bestimmen Sie die Lösung  $\mathbf{u}(t)$  der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für diese Lösung  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t)$ .

- Konvergiert die Lösung des Systems aus Teil a) bei beliebigen Anfangsbedingungen für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 3:

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) = 0.$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes:  $u_0(t) = t^k$  eine Lösung der Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsansatzes  $\hat{u}(t) = u_0(t) \cdot w(t)$  eine weitere Lösung der Differentialgleichung und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.
- Berechnen Sie die Lösung der Randwertaufgabe

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) = 0, \quad 1 < t < e^{\frac{1}{3}}, \quad u(1) = 0, u(e^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

d) Können Sie auch eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe berechnen?

$$u''(t) + \frac{7}{t}u'(t) + \frac{9}{t^2}u(t) = 0, \quad 1 < t < e^{\frac{1}{3}}, \quad u(1) = 0, u'(e^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

**Abgabe bis:** 12.01.2024

*Das Mathe III Team wünscht Ihnen  
ein frohes Fest und  
einen guten Start ins neue Jahr!*