Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung

$$u^{(4)}(t) + a_3 u^{'''}(t) + a_2 u^{''}(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0 \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) eine Basis/ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 := \{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = e^{5t},\, u_3(t) = e^{9t}\}$.

b) $M_2 := \{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = e^{it},\, u_3(t) = e^{2t},\, u_4(t) = e^{2it}\}$.

c) $M_3 := \{u_1(t) = 1,\, u_2(t) = t,\, u_3(t) = e^{2t},\, u_4(t) = e^{-2t}\}$.

d) $M_4 := \{u_1(t) = e^t,\, u_2(t) = \sin(2t),\, u_3(t) = e^{-2it},\, u_4(t) = e^{2it}\}$.

Aufgabe 2)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u''(t) + 9u(t) = b(t)$$

a) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für die Inhomogenitäten
i) $b(t) = 5e^{-t}$, **ii)** $b(t) = 5\sin(2t)$, **iii)** $b(t) = 5\sin(3t)$.

c) Bestimmen Sie die Lösungen der zugehörigen Anfangswertaufgaben für die Anfangswerte

$$u(0) = u'(0) = 0\,.$$

Prüfen Sie jeweils, ob die Lösungen für $t \geq 0$ beschränkt sind, und geben Sie wenn möglich jeweils obere Schranken für $|u(t)|$, $t \geq 0$ an.

Aufgabe 3) Kür/Etwas anspruchsvoller.

Gesucht ist eine partikuläre Lösung u_p der inhomogenen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_0[u] := \sum_{k=0}^{m} a_k u^{(k)}(t) = b(t) = b_0 e^{\alpha t}, \qquad a_m = 1, a_k \in \mathbb{R}, 0 \neq b_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u_p(t) = Be^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ genau dann zum Erfolg führt, wenn α keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P_0(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k.$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u_p(t) = Bte^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ zum Erfolg führt, wenn α eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P_0[\lambda] := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k.$$

ist.

Tipp: Nutzen Sie die Faktorisierung aus Seite 40 der Vorlesung.

c) Sei nun α eine l-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$. Also

$$P_0(\lambda) = P_l(\lambda)(\lambda - \alpha)^l, \; P_l(\alpha) \neq 0$$

und

$$\mathcal{L}_0[u] := \mathcal{L}_l \left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha \right)^l u \right].$$

Zeigen Sie, dass $u_p(t) := Bt^l e^{\alpha t}$, $B \in \mathbb{C}$ ein geeigneter Ansatz für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist.

Tipps:

Definieren Sie P_j bzw. $\mathcal{L}_j$ über

$P_0(\lambda) = P_j(\lambda)(\lambda - \alpha)^j$, $\mathcal{L}_0[u] = \mathcal{L}_j \left[\left(\frac{d}{dt} - \alpha \right)^j u \right]$, $\qquad j = 0, 1, 2, \ldots, l.$

α ist $(l - j)-$ fache Nullstelle von P_j. Insbesondere keine Nullstelle von P_l.

Zeigen Sie

$$\mathcal{L}_0[Bt^l e^{\alpha t}] = \frac{l!}{(l-j)!} B \mathcal{L}_j[t^{l-j} e^{\alpha t}]$$

mittels Induktion und unter Ausnutzung der Faktorisierungsmethode aus Seite 40 der Vorlesung.

Abgabe bis: 15.12.2023