

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 4, Hausaufgaben

### Aufgabe 1:

- a) Welche der folgenden Differentialgleichungen für  $u(t)$  ist exakt?
- (i)  $u + u' = 0$ .
  - (ii)  $(12tu + 3) + 6t^2 \cdot u' = 0$ .
  - (iii)  $2t(u^2 - t^2 - 1) + 2uu' = 0$ .
  - (iv)  $u^3 + e^t + 3tu^2u' = 0$ .
- b) Bestimmen Sie für die exakten Differentialgleichungen aus Teil a) jeweils ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

### Aufgabe 2:

- a) Ermitteln Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 2t^3 u'(t) = e^{-\frac{t^4}{2}} \cdot \sin(2t) \quad u(0) = 2, u'(0) = 0.$$

**Hinweis:** Es genügt eine Integraldarstellung der Lösung.

- b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = (u(t))^{-3} = g(u(t)) \quad u(0) = 2, u'(0) = 0.$$

### Aufgabe 3:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge des Stoffes  $S(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. Es seien

$$\begin{aligned} V &:= \text{Volumen} & K_M &:= \text{Sättigungskonzentration,} \\ K_0 &:= \text{Anfangskonzentration} & S(t) &:= \text{unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt } t, \\ S_0 &:= S(0) = \text{unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert),} \\ K_0 + \frac{S_0 - S(t)}{V} &= \text{Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt } t, \\ \gamma &:= \text{Proportionalitätskonstante.} \end{aligned}$$

- a) Beschreiben Sie den Auflösungsprozess durch eine Differentialgleichung für  $S(t)$ .

- b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Daten

$$S_0 = 10 \text{ kg}, V = 100 \text{ Liter}, K_M = 0.25 \text{ kg/l}, K_0 = 0 \text{ kg/l}, \gamma = 4 \text{ l}/(\text{kg} \cdot \text{sek}).$$

Benutzen Sie die aus der Vorlesung für logistisches Wachstum bekannte Substitution  $u = S^{-1}$ .

**Abgabe bis:** 01.12.2023