Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' - 2y = 4t$.

a) Zeigen Sie, dass $y_p(t) = -2t - 1$ die Differentialgleichung löst.

b) Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung . Zeigen Sie, dass $y := \tilde{y} - y_p$ die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' - 2y = 0$ löst.

c) Berechnen Sie Lösungen y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h' - 2y_h = 0$, zum Beispiel mit Hilfe der Formel aus der Seite 9 der Vorlesung.

d) Aus b) folgt, dass jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sich als Summe einer Lösung der homogenen Differentialgleichung und y_p schreiben lässt. Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' - 2y = 4t, \qquad y(0) = 2.$$

Aufgabe 2:

Weisen Sie analog zur Vorgehensweise auf Seite 9 der Vorlesung die auf Seite 11 gegebene Darstellung

$$u(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C), \qquad \text{mit } A'(t) = a(t),\, (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\, C \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

für jede Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = a(t) \cdot u(t) + b(t)$$

nach. Dabei gelten die gleichen Voraussetzungen an a und b wie in der Vorlesung.

Tipp:
Zeigen Sie zunächst durch Einsetzen in die Differentialgleichung ,dass durch $(*)$ eine Lösung gegeben ist. Nehmen Sie nun umgekehrt an, dass Sie eine Lösung u haben, und zeigen Sie analog zur Vorgehensweise auf Seite 9 der Vorlesung, dass $e^{-A(t)}u(t) - B^*(t)$ konstant ist.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = \cos(t) \cdot u(t) + te^{\sin(t)}, \qquad u(0) = 5.$$

Abgabe bis: 03.11.2023