Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 23/24

Klausurberatung Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Bitte beachten/Please note:

- **Der Saal wird in 3 Bereiche aufgeteilt sein/ The hall will be divided into 3 sections:**
  Nur DGL I (LuM)
  Mathe III (DGL I und Ana III): Englisch
  Mathe III (DGL I und Ana III): Deutsch

- **Die Klausurhefte werden bereits auf den Tischen liegen**
  1. Bitte nehmen Sie Platz, und bleiben Sie sitzen.
  2. **Die Klausurhefte nicht öffnen! (Täuschungsversuch)**
  3. Klausurdeckblätter ausfüllen - **aber nicht öffnen!**
  4. Sobald alle in Ihrer Reihe die Deckblätter ausgefüllt haben, werden die Identitäten geprüft.
  5. **Die Klausur wird erst aufgeschlagen, wenn das Startsignal kommt.**

- **The exams will already be on the tables**
  1. Please take a seat and stay seated!
  2. **Do not open the exams! (This would be considered as a cheating attempt)**
  3. Fill in both exam cover sheets - **but do not open!**
  4. Once everyone sitting in your row has filled in the cover sheets, we will start verifying the identities.
  5. **The exam sheet is allowed to be opened only after the start signal.**

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres (partielles) ableiten
- Einfache Integrale berechnen
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren berechnen,
- Elementares rechnen mit komplexen Zahlen.
- Lineare Gleichungssysteme lösen (Eigenvektoren, Parameter aus allg. Lösung mittels Anfangs-/Randwerte berechnen)

Es folgen die **Top Themen der letzten Klausuren**

- Elementare Lösungsmethoden Blätter 1-4

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$u' = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL homogen	$y_h'(t) = a(t)y_h^1(t)$	$y_h = e^{\int a(t)dt}$ $y_h = e^{A(t)+k} = cy_H$	separierbar
Lineare DGL inhomogen	$y'(t) = a(t)y^1(t) + b(t)$	$y_P = c(t) \cdot y_H$ $c'(t) \cdot y_H \overset{!}{=} b$ $y = c \cdot y_H + y_P$	$\longleftarrow$ Ansatz
	Alternativ:	$y(t) = e^{A(t)}\,(B^*(t) + C)$ $A'(t) = a(t),$ $(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$	*
Bernoullische DGL	$u'(t) = a(t)u^1(t) + b(t)(u(t))^\alpha$	$y := u^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ 1$	$\dot{y} = (1-\alpha)(a \cdot y + b)$ linear
Riccatische DGL	$u'(t) = a(t)u^1 + b(t)u^2 + c(t)$ b, c nicht ident. 0	$y := \frac{1}{u - u_P}$	$\dot{y} = -[a + 2b \cdot u_P] \cdot y - b$ linear

Bei allen Typen aus der Tabelle:

Typ bestimmen

Transformationen/Substitution $\longrightarrow$ separierbare oder lineare DGl

Wenn linear: Erst homogene lineare Differentialgleichung

entspricht separierbare Einzeldifferentialgleichung $y_h'(t) = a(t)y_h(t)$

oder *

dann inhomogene lineare: Variation der Konstanten

Exakte DGL: $g(t,u) + h(t,u)\,u'(t) = 0$ mit $g_u(t,u) = h_t(t,u)$

Bei exakten: Potential bestimmen und $= K$ setzen.

zu $\binom{g}{h}$

Passende Aufgaben: Blatt 2,Hausaufgabe[redacted] 3= H2-3, P3-2, H3-1, H3-2, P4-1, P4-2, H4-1

Blatt Aufgabe

Blätter 6

- **Lineare Systeme** $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t)$

  Bei nicht konstanten Koeffizienten:

  - Lösungsvorschläge für das homogene System gegeben
  - Prüfe ob Fundamentalsystem (Lösung? Dimension Lösungsraum, Wronski)
  - Variation der Konstanten für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

    V. d. K
  - Parameter aus allgemeiner Lösung mit Hilfe von Anfangs- oder Randwerten bestimmen

  Bei Konstanten Koeffizienten $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$ **zusätzlich:**

  - Fundamentalsystem für $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$ berechnen, reelle Darstellung der allgemeinen Lösung
  - Spezieller Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

    bei $\boldsymbol{b}(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, wenn μ keine EW von A möglich!

    oder

    V. d. K

  Passende Aufgaben: P6-1, P6-2, H6-1, H6-2

Blätter 5

- **Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**
  - Zugehörige AWA auf äquivalentes System umschreiben

  - Allgemeine Lösung für homogene Gleichung: Fundamentalsystem, reelle Darstellung

  - Partikuläre Lösung für inhomogenes Problem: spezielle Ansätze
  - Wer spezielle Ansätze nicht mag/kann, muss Matrixschreibweise und Variation der Konstanten können

Passende Aufgaben: P5-1, P5-2, H5-1, H5-2

Blätter 7

- **Stabilität**, Lineare Systeme $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$
  - Stationäre Punkte bzw. Ruhelagen $\boldsymbol{y}^*$ sind solche für die $\boldsymbol{y}' = 0$ gilt.
  - Stabilität prüfen bei $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$

    Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{A}$ berechnen.

    Vorzeichen der Realteile von λ_k und eventuell

    Dimension Eigenraum zu λ_ks mit $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) = 0$ entscheiden!

Passende Aufgaben: P7-2, H7-2, H7-3

- **Laplace-Transformation**
  - Transformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 7
  - Algebraische Gleichung lösen
  - e-Fuktionen und Verschiebungen ausblenden, Rest zerlegen (PBZ)
  - Rücktransformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 7

  Passende Aufgaben: P7-1, H7-1

- **Blätter 1:**

  - Aufgabe P1: Modellierung $\emptyset$

  - Aufgabe P2: Lösung bei gegebenem Ansatz $ke^{\lambda t}$ verifizieren/finden. Inzwischen systematisch klar $P(\lambda) = 0 \ldots$

  - Aufgabe H1-1: Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren

  - Aufgabe H1-2: Komplexe Eigenwerte

  WZ (Werkzeug)

- **Blätter 2:**

  - Aufgabe P2-1: Erkennen von lineare/homogene Dgl. Ordnung der Dgl. (WZ)
  - Aufgabe P2-2 und P2-3: Prüfen ob Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind. zum gewöhnen/einführen

  - Aufgabe H2-1: Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten Schritt für Schritt mit Anleitung. Inzwischen: Rezept
  - Aufgabe H2-2: Beweis Lösungsformel für Lineare DGL 1. Ordnung $\emptyset$
  - Aufgabe H2-3: Lösen einer lineare DGL 1. Ordnung (variable Koeffizienten) mit Lösungsformel xxx

- **Blätter 3:**

  - Aufgabe P3-1, a-d: Begriffe: Ordnung, explizit, linear, homogen ×××
  - Aufgabe P3-1, e: DGL n-ter Ordnung umschreiben in System erster Ordnung ×××
  - Aufgabe P3-2, a: Separierbare Dgl
  - Aufgabe P3-2, b: Ähnlichkeitsdifferentialgleichung , Typ $y' = f(\frac{y}{t})$. ×××
  - Aufgabe H3-1, a-b : Separierbare Differentialgleichung
  - Aufgabe H3-1, c-d : Eindeutigkeit der Lösung der zugehörigen AWA ∅
  - Aufgabe H3-2a, Nachweis: Substitution $u = (\alpha t + \beta y + \gamma)$ überführt Ähnlichkeitsdifferentialgleichung Typ $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$ in separierbare. ∅
  - Aufgabe H3-2b,Lösen Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mittels der Substitution aus a), Zugehörige Anfangswertaufgabe ×××
  - Aufgabe H3-2c, Prüfen der Lösung aus b) durch Einsetzen in Differentialgleichung ∅

- **Blätter 4:**

  - Aufgabe P4-1: Typ erkennen, geeignete Substitution und neue Differentialgleichung angeben ×××

  - Aufgabe P4-2: Bernoullische Differentialgleichung lösen, VdK ×××

  - Aufgabe P4-3: Riccatische Differentialgleichung lösen $\emptyset$

  - Aufgabe H4-1, a: Prüfen auf Exaktheit ×××

  - Aufgabe H4-1, b: Für exakte Differentialgleichungen aus a Potential bestimmen und Differentialgleichung lösen. ×××

  - Aufgabe H4-2, a: Differentialgleichung zweiter Ordnung Typ $u'' = f(t, u')$ mit Substitution $z = u'$.

  - Aufgabe H4-2, b: Differentialgleichung zweiter Ordnung Typ $u'' = g(u)$. Multiplikation mit $u' \longrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int g(u)du$.

  $\emptyset$

  - Aufgabe H4-3, Modellierungsaufgabe. $\emptyset$

- **Blätter 5:**
  - Aufgabe P5-1: Differentialgleichung 3. Ordnung, inhomogen mit konstanten Koeffizienten,
    doppelte Nullstelle von $P(\lambda)$
    spezielle Ansatz bei $h(t)$ = Polynom x Exp-Funktion
  - Aufgabe P5-2a: Dgl 3. Ordnung, homogen mit konstanten Koeffizienten, komplexe Nullstellen von P
  - Aufgabe P5-2b: Spezielle Ansätze
  - Aufgabe H5-1: Differentialgleichung 4. Ordnung: Erkennen welche Menge FS sein kann.
    Fundamental-system
  - Aufgabe H5-2: Dgl 2. Ordnung, komplexe Nullstellen von P
  - Aufgabe H5-2b: Spezielle Ansätze

  - Aufgabe H5-2c: Zugehörige AWA, Beschränktheit (Resonanzfall) $\emptyset$
  - Aufgabe H5-3: Kür. Beweis für Ansatz für spezielle Lösungen. $\emptyset$

- **Blätter 6:**

  – Aufgabe P6-1: Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, homogen, reelles Fundamentalsystem bestimmen
  Nötig: Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren

  – Aufgabe P6-2: Lineares System, nicht konstante Koeffizienten, Fundamentalsystem überprüfen (Wronski), Variation der Konstanten, Anfangswertaufgabe

  kann auch skalar geprüft werden

  $u_h = c\,u_H$

  $u_p = c(t)\,u_H$

  $\xrightarrow{\text{DGL}} \dot{c}(t)\,u_H = b(t)$

  $\rightarrow \dot{c} \rightarrow c \rightarrow u_p$

  – Aufgabe H6-1: a)Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, inhomogen, komplexe Eigenwerte, gesucht reelles Fundamentalsystem
  b) Spezieller Ansatz für $\boldsymbol{y}_p$.

  – Aufgabe H6-2: AWA für lineares 3x3 System, konstante Koeffizienten,homogen, einfache, reelle Eigenwerte.

  – Aufgabe H6-3, a: "Eulersche DGL": eine Lösung über Ansatz t^k,
  – Aufgabe H6-3, b: zweite Lösung über Reduktionsansatz.
  – Aufgabe H6-3, c-d: zugehörige RWA'n. Existenz von Lösungen!

  $\emptyset$

- **Blätter 7:**

  xxx

  – Aufgabe P7-1: Laplace Transformation hin bzw. zurück. Kein lösen der Dgl. mit Laplace vorgeschrieben

  – Aufgabe P7-2a: Stabilität, linear, 2x2 System xxx

  – Aufgabe P7-2b: Stabilität, linear, 3x3 System, parameterabhängig, einfach zu sehen. xxx

  – Aufgabe H7-1a: AWA mit Laplace Transformation lösen. Ø
  – Aufgabe H7-1b: gleiche AWA, über charakt. Polynom, Umschreiben auf System, Variation der Konstanten. gute Übung / Wiederholung xxx

  – Aufgabe H7-2: Stabilität, linear, 3x3 System, parameterabhängig, Berechnung Eigenraum nötig. xxx
  – Aufgabe H7-3: Stabilität, nicht linear, 2-Populationen-Modell. Ø

Viel Erfolg!