Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 7 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Laplace-Transformation, Stabilität

29.01. Klausurberatung

Dgl I : 12^{30} Uhr

Ana $\underline{\text{III}}$: ca. 13^{15} Uhr

Laplace-Transformation [redacted]

Ziel: Führe die Lösung von Anfangswertaufgaben auf die Lösung algebraischer Gleichungen zurück.

Originalfunktionen: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt Originalfunktion, wenn

f und die Ableitungen von f bis auf Sprungstellen stetig sind, wobei in jedem endlichen Intervall höchstens endlich viele Sprungstellen auftauchen,

$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $\forall t \geq 0$, wobei $M \in \mathbb{R}$ fest und $\gamma \geq 0$ Wachstumskoeffizient

$f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

Vorgehen:

Problem im Originalraum	$\longrightarrow$ Laplace Transf.	Problem im Bildraum $\downarrow$
		$\downarrow$ lösen
	Rücktransf.	$\downarrow$
Lösung im Originalraum y	$\longleftarrow$ $\longleftarrow$	Lösung im Bildraum Y

Laplace Transformation:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}\; =: F(s) = \overset{\mathcal{L} f(s)}{L[\cancel{f(t)}]} \quad \text{für Re}\,(s) > \gamma \geq 0$$

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet F$$ heißt **Korrespondenz**

Doetsch-
symbol

Anwendung auf Differentialgleichungen:

$$\text{AWA} = \text{DGL} + \text{AW'e} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \text{algebr. Gleichung}$$

$$\downarrow \text{ lösen}$$

AWA

$$y = \text{Lösung der DGL} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y$$

Gesucht Lösung y. Wir nehmen an, dass y eine Originalfunktion ist und nennen die Laplacetransformierte Y. Es gilt also $y \circ\!\!-\!\!\bullet Y$. Dann ist

$$y' \circ\!\!-\!\!\bullet sY - y(0)$$

$$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty y'(t) \underbrace{e^{-st}}_{g(t)} dt = \lim_{b\to\infty} \left[y(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^b - \int_0^b y(t) \underbrace{(-se^{-st})}_{g'(t)} dt \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} e^{-sb} y(b)}_{=0 \text{ für } Re(s) > \gamma} - y(0)e^0 + s \underbrace{\int_0^\infty y(t)e^{-st} dt}_{Y(s)}$$

mit $|y(t)| < Me^{\gamma t} \quad \forall t \geq 0$

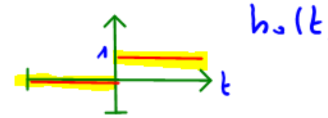
$$y'' = (y')' \circ\!\!-\!\!\bullet s(sY - y(0)) - y'(0)$$

$$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$y''' \circ\!\!-\!\!\bullet s^3 Y - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

Beim gewöhnlichen Integrieren ist man darauf angewiesen möglichst viele elementare Integrale zu kennen bzw. nachschlagen zu können. Bei der Laplace Transformation muss man viele Korrespondenzen kennen bzw. gute Tabellen haben. Die Tabellen beziehen sich immer auf

Originalfunktionen. D.h. $f(t) = 0, \forall t < 0$.



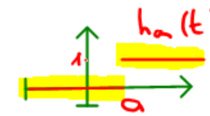
$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

$f(t),\ t \geq 0$	F	γ
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	Re (a)
$e^{at}\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	0
$e^{at}\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	0

$h_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt$

$= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{e^{-sb}}{-s}}_{=0 \text{ für } Re(s)>0} + \frac{1}{s}e^0$

$= \frac{1}{s}$



$h_a(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_a^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt$ $\qquad \tau = t - a$

$= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}\, d\tau$

$= e^{-as} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s\tau}\, d\tau}_{1/s} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$

Einige wichtige Rechenregeln: Es gelten $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$, $g \circ\!\!-\!\!\bullet G$

$I)$	$\alpha f + \beta g$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha F + \beta G$	Linearität
$II)$	$f(\alpha t)$, $\alpha > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	Streckung im O–Raum
$III)$	$h_a(t) f(t-a)$, $a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa} F(s)$	Verschiebung im O–Raum
$IV)$	$e^{at} f(t)$, $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im O–Raum
$V)$	$f^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0)$	Ableitungen im O-Raum vgl. Seite 4
$VI)$	$(-t)^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^{(n)}(s)$	Ableitungen im Bildraum Mult. mit $(-t)^n$ im O–Raum

Beispiel 1:

Oben gesehen: $\tilde{F}(s) = \frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ \; h_0(t) \cdot 1 = 1 \qquad \forall t \geq 0$

$\tilde{F}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \; \tilde{f}(t) = h_0(t)$

$\tilde{F}(s-a) = \frac{1}{s-a}$

$F(s) = \frac{1}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ \;$?

Regel IV) $f(t) := e^{at}\tilde{f}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \tilde{F}(s-a) \longrightarrow$

$F(s) = \tilde{F}(s-a) \circ\!\!-\!\!\bullet \; e^{at} \cdot \tilde{f}(t) = e^{at} \cdot h_0(t)$

$\frac{1}{(s-a)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \;$? $\qquad \left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{-1}{(s-a)^2}$

$\frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-a} \;\not\!\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at} \cdot e^{at}$

$t \geq 0$

VI) $(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; F^{(n)}(s)$

$\frac{1}{s-a} = F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \; e^{at}$

$\frac{-1}{(s-a)^2} = F'(s)$

$n=1$

$(-t)^1 \cdot f(t) = -t e^{at}$

$\frac{1}{(s-a)^2} = (-1)\left(\frac{1}{s-a}\right)' \bullet\!\!-\!\!\circ \; (-1)(-t)e^{at}$

$= t e^{at}$

$\frac{1}{(s-a)^3} = \frac{1}{(-1)(-2)}\left(\frac{1}{s-a}\right)'' \overset{\mathrm{IV}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \; \frac{1}{2}(-t)^2 f(t)$

$= \frac{1}{2} t^2 \cdot f(t)$

Allgemein:

Nachweis: Induktion

$$\boxed{\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{t^n}{n!}e^{at}}$$

Beispiel 2: (Alte Klausur, Str./Ki)

Lösen Sie die AWA

$$1\,y'' - 1\,y' - 6y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

mit Hilfe der Laplace Transformation.

Es sei $Y(s)$ die Bildfunktion der noch unbekannten Lösung $y(t)$.

$y \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y$

Schritt 1) Laplace-Transformation der einzelnen Terme der AWA :

$$y' \circ\!\!-\!\!\bullet\; sY - y(0) = sY - 0$$

$$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet\; s(sY - 0) - y'(0) = s^2Y - 1$$

$$e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(s+2)} \quad \text{(Tabelle S. 5)}$$

Transformation der AWA ergibt also

$$1\,(s^2Y - 1) - 1(sY) - 6(Y) = \frac{1}{s+2}$$

$$1\,y'' - 1\,y' - 6\,y = e^{-2t}$$

$$s^2Y - 1 \qquad sY - 0 \qquad Y \qquad \frac{1}{s+2}$$

Schritt 2) Lösung der algebraischen Gleichung :

$$s^2 Y - 1 - sY - 6Y = \frac{1}{s+2} \iff \left(s^2 - s - 6\right) Y = 1 + \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{(s+2)}$$

$\Big| \cdot \frac{1}{s^2-s-6}$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2-s-6} \cdot \frac{s+3}{(s+2)} = \frac{s+3}{(s^2-s-6)\,(s+2)}$$

Schritt 3) Rücktransformation: Wegen der zu knappen Zeit verzichten wir hier auf die begriffe Übertragungsfunktion/Greensche Funktion, sowie auf die Verwendung von Faltungsintegralen.

Aus Beispiel 1: $\boxed{\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\frac{t^n}{n!}}$

also machen wir eine PBZ:

$s^2 - s - 6 = (s-3)(s-(-2))$

Nenner $= (s-3)(s+2)(s+2)$

Zunächst Nennernullstellen: $s^2 - s - 6 = 0 \implies s = -2$ oder $s = 3$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s-3)(s+2)^2} = \frac{a}{s-3} + \frac{b}{(s+2)^2} + \frac{c}{s+2} = \frac{a(s+2)^2 + b(s-3) + c(s-3)(s+2)}{(s-3)(s+2)^2}$$

Alternativ $\frac{\beta s + \gamma}{(s+2)^2}$

$0 \cdot s^2 +$

$$\iff s + 3 \overset{!}{=} a(s+2)^2 + b(s-3) + c(s-3)(s+2)$$

$\forall s$

$c(s^2 + \ldots)$

$\underline{s = 3:}$ $\quad 3+3 = 6 \stackrel{!}{=} a(3+2)^2 = 25a \qquad a = \frac{6}{25}$

$\underline{s = -2:}$ $\quad -2+3 = -1 \stackrel{!}{=} b(-2-3) = -5b \implies b = \frac{-1}{5} = \frac{-5}{25}$

Potenz s^2 : $\quad 0s^2 + s + 3 \stackrel{!}{=} a(s^2 + \dots) + b(s-3) + c(s^2 + \dots) \iff$

$0 = a + c \implies c = -a = -6/25$

$$\iff \boxed{a = -c = 6/25\,, \quad b = -5/25}$$

$$* \qquad \boxed{Y(s) = \frac{1}{25}\left(\frac{6}{s-3} - \frac{5}{(s+2)^2} - \frac{6}{s+2}\right)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{25}\left(6\frac{1}{\underbrace{s-3}_{\substack{\bullet\\ |\, n=0\\ \circ\\ e^{-3t}\cdot\frac{t^0}{0!}}}} - 5\frac{1}{\underbrace{(s+2)^2}_{\substack{\bullet\\ |\, n=1\\ \circ\\ e^{-2t}\frac{t^1}{1!}}}} - 6\frac{1}{\underbrace{s+2}_{\substack{\bullet\\ |\, n=0\\ \circ\\ e^{-2t}\cdot\frac{t^0}{0!}}}}\right)$$

wir wissen: $\boxed{\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\frac{t^n}{n!}}$

$n=0: \quad \frac{1}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\frac{t^0}{0!}$

$n=1 \quad \frac{1}{(s-a)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\frac{t^1}{1!}$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{25}(6e^{3t} - 5te^{-2t} - 6e^{-2t})}$$

Falls Nenner nicht in lineare Faktoren zerfällt

z. B $\quad$ **Nenner** $= \underbrace{(s^2+2s+2)}\cdot(\dots)$

$= ((s+1)^2+1^2)\cdot(\dots)$ $\quad$ Wir können (Tabelle) $\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}$ und $\frac{1}{(s+1)^2+1}$ → zerlege entsprechend in

$$\frac{\dots}{(s+1)^2+\underbrace{1^2}_{\omega^2}} = \alpha\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + \beta\frac{\overset{\omega}{\overset{\shortparallel}{1}}}{(s+1)^2+1^2}$$

Beispiel 3/Hinweis zur Hausaufgabe 1a:

Für $\omega \neq 0$. Rücktransformation von

$$\frac{\alpha s+\beta}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{\alpha(s-a)+(\alpha a+\beta)}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\alpha(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{\alpha a+\beta}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$= \alpha\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{\alpha a+\beta}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$e^{at}\cos(\omega t)$ $\qquad$ $e^{at}\sin(\omega t)$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \alpha\cdot e^{at}\cos(\omega t) + \frac{\alpha\cdot a+\beta}{\omega}\cdot e^{at}\sin(\omega t)$$

Stabilität, linearer Fall

Physikalisch : **Stationärer Punkt** / Ruhelage :

Punkt in dem sich nichts verändert!

Mathematisches Modell : $y' = 0$.

$y(t) = ce^{at}$ $\quad y(t_0) = ce^{at_0} = y_0$ $\quad c = y_0 e^{-at_0}$

Beispiel : $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y' = ay$, $y(t_0) = y_0 \implies y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$. $(*)$

Ruhelage : $(y^*)'(t) = 0$ also $ay^*(t) = a\, y_0\, e^{a(t-t_0)} = 0$

$\implies y_0 = 0$ und damit $y^*(t) = 0$, $\forall t$. $\quad y_0 = 0 \longrightarrow y^*(t) = 0 \longrightarrow y^{*\prime} = 0$

Frage : Ist die Ruhelage **stabil**? Was passiert, wenn man die Anfangsdaten ein wenig stört? Also hier statt $y_0 = 0$ etwa

$y_0 = \epsilon > 0$ vorgibt. $\quad |\varepsilon|$ klein

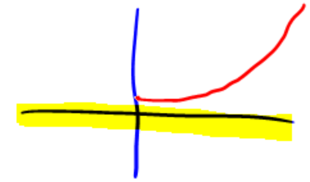
$(*)$ $y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$

Lösung des gestörten Problems : $\quad y(t) = \epsilon e^{a(t-t_0)}$

Lösung des ursprünglichen Problems : $y^*(t) = 0$.

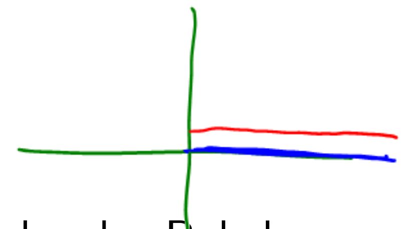
Für $a > 0$

$$\lim_{t\to\infty}\overset{\to 0}{(y(t)-y^*(t))} = \lim_{t\to\infty} y_0 e^{a(t-t_0)} = \lim_{t\to\infty} \overbrace{y_0 e^{-at_0}}^{\text{fest}} \overset{\to\infty}{e^{at}} =$$



Die Lösung des gestörten Problems entfernt sich immer weiter von der Ruhelage. Die Ruhelage ist **instabil**

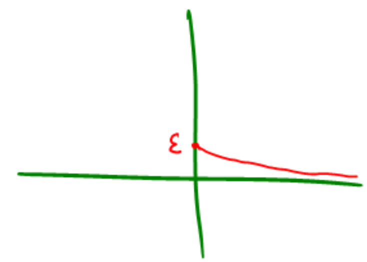
Für $a = 0$, $y' \overset{=0}{=} ay$, $y(t_0) = y_0 \implies \boxed{y(t) = y_0.}$ $\forall t$
Abstand der Lösungen kontrollierbar $\longrightarrow$ Ruhelage **(gleichmäßig) stabil**



Für $a < 0$ nähert sich die Lösung des gestörten Problems für große t wieder der Ruhelage. Genauer

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)-y^*(t)) = \lim_{t\to\infty} y_0 e^{a(t-t_0)} - 0 = \lim_{t\to\infty} y_0 e^{-at_0} \overset{\to -\infty}{e^{at}} = 0$$

$\implies$ Ruhelage **asymptotisch stabil/attraktiv**.



Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(t) \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Lösungen sind Linearkombinationen von Basislösungen der Form

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \qquad e^{\lambda t}(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \cdots \qquad \lambda \text{ Eigenwert von } \boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$: Eigenvektor/Hauptvektor (t–unabhängig) $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{[1]} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v^{[n]}$

$c_k e^{\lambda_k t} v^{[k]}$

$\boldsymbol{y}^*(t) = (0, 0, \cdots, 0)^T$ ist eine stationäre Lösung

zur Anfangsbedingung (o.E.d.A: $t_0 = 0$): $\boldsymbol{y}(0) = (0, 0, \cdots, 0)^T$

Annahme : $\exists$ Eigenwert $\lambda_k = a + ib$ mit $\boxed{a = Re(\lambda_k) > 0,}$ $\boldsymbol{v}^{[k]}$ = Eigenvektor

und neue Anfangsbedingung: $\boldsymbol{y}(0) = \epsilon\,\boldsymbol{v}^{[k]}$ $|\varepsilon|$ klein

Dann ist die Lösung $y(t) = \quad \epsilon \cdot e^{\lambda_k t}\boldsymbol{v}^{[k]}$ und $c_k = \varepsilon$ $c_j = 0$ sonst

$\|y(t) - y^*(t)\| = \quad \|\epsilon \cdot e^{\lambda_k t} \cdot \boldsymbol{v}^{[k]}\| = \|\epsilon \cdot e^{at}e^{ibt}\boldsymbol{v}^{[k]}\| =$ $y(0) = \varepsilon e^0 v^{[k]}$ ✓

$\varepsilon v^{[k]}$ 0

$$= \underbrace{|\varepsilon|}_{\text{fest}} \cdot |e^{at}| \cdot \underbrace{|e^{ibt}|}_{1} \cdot \underbrace{\|v^{[k]}\|}_{\text{fest}}$$

$|e^{at}| \to \infty$

Geringste Störungen der Ruhelage $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ können dazu führen, dass die Lösung sich für große t beliebig weit von der Ruhelage entfernt. Die Ruhelage ist **instabil**.

Für Eigenwerte $\lambda_m = a + ib$ mit $a = Re(\lambda_m) < 0$ gilt dagegen

$$\|c_m e^{\lambda_m t} v^{[m]}\| = \|c_m e^{at} e^{ibt} v^{[m]}\| = \underbrace{|c_m|}_{\text{fest}} \; e^{at} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \; \cdot \underbrace{|e^{ibt}|} \; \underbrace{\|v^{[m]}\|}_{\text{fest}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Wenn Hauptvektoren benötigt werden gilt immer noch z.B.:

$$\|c_m e^{\lambda_m t}(tv^{[m]} + w^{[m])}\| = \|c_m e^{at} e^{ibt}(tv^{[m]} + w^{[m]})\| \to 0$$

(exp wächst schneller als jede Potenz) $\quad \dfrac{t}{e^{-at}} \xrightarrow[a<0]{t\to\infty} 0$

Die zugehörigen Lösungsanteile gehen also für $t \to \infty$ gegen die Nulllösung.

Hat A nur EWe mit $Re(\lambda) < 0 \Longrightarrow$ so ist die Nulllösung **asymptotisch stabil**

Gibt es EW'e mit negativem Realteil und EWe mit Realteil Null, so sind auch letztere harmlos, solange die zugehörigen Lösungsanteile keine Hauptvektoren enthalten:

$$b \in \mathbb{R},\ \lambda_p = ib \Longrightarrow \quad \|c_p e^{\lambda_p t} v^{[p]}\| = \|c_p e^{ibt} v^{[p]}\| = \|c_p v^{[p]}\| \quad \text{beschränkt,}$$

$$\underbrace{|c_p| \cdot \|v^{[p]}\|}_{\text{fest}} \cdot \underbrace{|e^{ibt}|}_{1}$$

Ruhelage ~~**gleichmäßig**~~ **stabil**

Ist aber algebraische Vielfachheit $(\lambda_p) >$ geometrische Vielfachheit(λ_p), so gibt es Lösungskomponenten der Form

$$\|c_p e^{\lambda_p t}(tv^{[p]} + w^{[p])}\| = \|c_p(tv^{[p]} + w^{[p]})\| \to \infty \quad (t \to \infty)$$

∞

Die Nulllösung ist **instabil**!

Zusammenfassung:

Gegeben DGL–System $y' = Ay$, A konstant.

a) Realteile **aller** Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ negativ

$\Longrightarrow$ Nulllösung [redacted] **asymptotisch) stabil**.

b) Realteil von mindestens **einem** EW positiv

$\Longrightarrow$ Nulllösung **instabil**.

c) Realteile **aller** EWe negativ oder Null und für die EWe mit Realteil Null $g(\lambda) = a(\lambda)$ (d.h. keine Hauptvektoren in der Lösungsdarstellung nötig) $\Longrightarrow$ Nulllösung [redacted] **stabil**. Andernfalls instabil.

Beispiel 1: a) Untersuchen Sie die Ruhelage $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ auf Stabilität.

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \alpha & 1 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 5 & \beta & \beta & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

EWe

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 5 & \beta & \beta & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-2-\lambda) \det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ \beta & \beta & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(\alpha-\lambda) \det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ \beta & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(-2-\lambda)}_{\lambda_2 = -2}(\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)\underbrace{(-1-\lambda)}_{\lambda_1 = -1}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \alpha$$

$\alpha > 0 \longrightarrow$ instabil

$\alpha < 0 \longrightarrow$ asymtotisch stabil

$\alpha = 0 \longrightarrow Re(\lambda_3) = Re(\lambda_4) = 0$

$$\lambda_3 = 0$$

$$(A - \lambda_3 I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \beta & \beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeile I und III: $-2v_1 = -4v_1 = 0 \longrightarrow \boxed{v_1 = 0}$

Zeile II: $3v_1 + v_3 = 0$

$\boxed{v_3 = 0}$

Zeile IV $5v_1 + \beta v_2 + \beta v_3 - v_4 = 0 \longrightarrow \boxed{v_4 = \beta v_2 \neq 0}$

$v^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ einzige EV-Richtung

$g(\lambda_3) = 1 < a(\lambda_3) = 2$

$Re(\lambda_3) = 0$

Nulllösung instabil

Zusatz zur Aufgabe: Für $\alpha = 0$ erhält man die Eigenwert/Eigenvektor Paare

$$\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2,\ \boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ \beta - 10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0,\ \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{sowie den Hauptvektor } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_3,\ \boldsymbol{v}^{[3]}$$

$(A - 0I)\, w = v^{[3]}$

Und damit die Allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \overset{0}{e^{-t}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \overset{0}{e^{-2t}} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ \beta - 10 \end{pmatrix} + \overset{\text{fest}}{c_3 e^{0 \cdot t}} \overset{\text{fest}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}} + \overset{\text{fest}}{c_4 e^{0 \cdot t}} \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ t + 0 \\ 0 + 1 \\ t\beta + 0 \end{pmatrix}$$

∞ ∞

$c_1 e^{\lambda_1 t} v^{[1]} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{[2]} + c_3 e^{\lambda_3 t} v^{[3]}$

$+ c_4 e^{\lambda_3 t} \left(t v^{[3]} + w \right]$

Beispiel 2: Untersuchen Sie die Ruhelage des folgenden Systems auf Stabilität

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

Ruhelage: $\boldsymbol{y}' = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \mathbf{0}.$

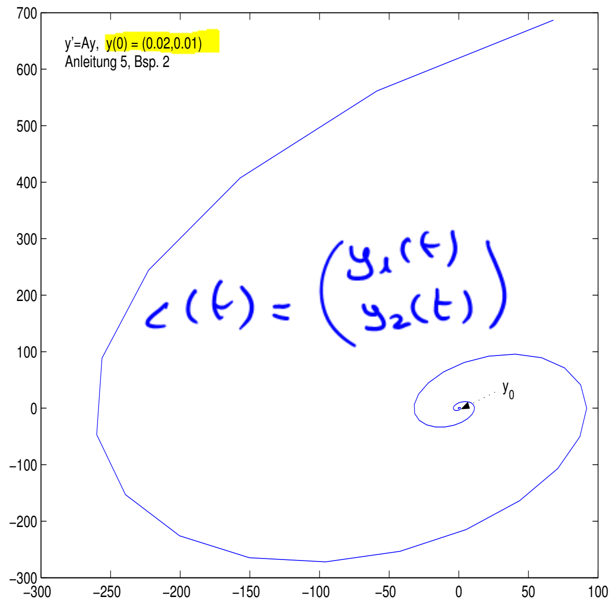
$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) =$$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$

$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

$\longrightarrow$ instabil

y_2



$c(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$

y_1

$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung

$c_1 \underline{e^{2t}} e^{3it} v^{[1]} + c_2 \underline{e^{2t}} e^{-3it} v^{[2]}$

bewirkt die Drehung

sorgt für immer größere Normen

Stabilität: nichtlineare, autonome Gleichung

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)), \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \quad \text{Jakobimatrix von } \boldsymbol{f}$$

wird (möglichst) auf den linearen Fall zurückgeführt!

Stationäre/Gleichgewichtspunkte : $(\boldsymbol{y}^*)' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) = 0$

asymptotisch

$\boldsymbol{y}^*$ **~~strikt~~ stabil** $\Longleftarrow$ Realteile aller EWe von $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$ negativ.

instabil $\Longleftarrow$ $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$ hat mindestens einen EW mit positivem Realteil.

keine Aussage mit Hilfe der Linearisierung:

Re $(\lambda_k) \leq 0, \ \forall k$ und $\exists l$ mit Re $(\lambda_l) = 0 \longrightarrow$ andere Methoden

Beispiel 3: Die Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels:

$$\ddot{\Phi} \;=\; -\,\omega^2\,\sin(\Phi)\;-\;2\,c\,\dot{\Phi}, \qquad \omega > c > 0\,.$$

DGL 2-ter / n-ter Ordnung: Erst auf System umschreiben $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$

geht mit $y_1 = \Phi$ und $y_2 = \dot{\Phi}$ über in das System:

$\dot{y}_1 = \dot{\phi} = y_2$

$\dot{y}_2 = \ddot{\phi} = -\omega^2 \sin(\phi) - 2c\,\dot{\phi} = -\omega^2 \sin(y_1) - 2c\,y_2$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2\,\sin(y_1) - 2\,cy_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1(y_1,y_2) \\ f_2(y_1,y_2) \end{pmatrix} =: \boldsymbol{f}(y_1,y_2)\,.$$

Stationäre Punkte: $\dot{\boldsymbol{y}} \overset{!}{=} \boldsymbol{0}$ $\quad \boxed{y_2 = 0}$

$\underset{\substack{\vee \\ 0}}{-\omega^2} \sin(y_1) \underbrace{-2c\,y_2}_{0} = 0 \implies \sin(y_1) = 0$

$\boxed{y_1 = k\pi}$

$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

Zur Stabilitätsuntersuchung berechne Eigenwerte der Jakobi-Matrix $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$ der rechten Seite $\boldsymbol{f}$ in den Gleichgewichtspunkten

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} (f_1)_{y_1} & (f_1)_{y_2} \\ (f_2)_{y_1} & (f_2)_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(y_1) & -2\,c \end{pmatrix},$$

Im Punkt $(0,0)^T$ gilt

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cdot 1 & -2\,c \end{pmatrix}.$$

$$(-\lambda)(-\lambda - 2c) + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda c + \omega^2 = 0$$

Damit lauten die Eigenwerte

$$\underbrace{\lambda_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega^2}}_{<0} \qquad \text{mit } \omega > c > 0\,.$$

imaginär

$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2)$

$= -c < 0$

Da $Re(\lambda_{1,2}) < 0$, ist der Punkt $(0,0)^T$ asymptotisch stabil.

Im Punkt $(\pi, 0)^T$ gilt $\qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1) & -2\,c \end{pmatrix}.$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda c - \omega^2$$

$$\lambda_{1,2} = -c \pm \sqrt{\underbrace{c^2 + \omega^2}_{> c^2}}$$

$$\lambda_1 = -c + \sqrt{c^2 + \omega^2} > 0 \longrightarrow \text{instabil}$$

Zur Hausaufgabe 2b:

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = e^{2t} \cdot \sin(t), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0.$$

i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

ii) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und geben Sie eine Fundamentalmatrix für dieses System an.

iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Verwenden Sie die Methode der Variation der Konstanten für das zugehörige System.

iv) Passen Sie die Koeffizienten an die Anfangsbedingungen an.

Für unser Beispiel von oben:

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

i) $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 3 \Longrightarrow \boxed{y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}}$

ii) $\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ 6y + y' + e^{-2t} \end{pmatrix}$

$$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ 6y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$FS: \quad Y(t) = FS(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{3t} \\ -2e^{-2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

iii) Ansatz $\quad \vec{y}_p(t) = Y(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{in Dgl-System}]{\text{Einsetzen}} \quad Y(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{3t} \\ -2e^{-2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{-2t} c_1'(t) + e^{3t} c_2'(t) = 0 \implies c_1'(t) = -e^{5t} c_2'(t) \quad (*)$$

$$-2e^{-2t} c_1'(t) + 3e^{3t} c_2'(t) = -2e^{-2t} \cdot (-e^{5t}) c_2'(t) + 3e^{3t} c_2'(t)$$

$$= 5e^{3t} c_2'(t) = e^{-2t} \implies c_2'(t) = \frac{1}{5} e^{-5t}$$

$$\text{z.B. } c_2(t) = -e^{-5t}$$

$$(*) \quad c_1'(t) = -e^{5t} \cdot \frac{1}{5} e^{-5t} = -\frac{1}{5} \qquad \text{z.B. } c_1(t) = -t/5$$

$$y_p(t) = c_1(t) e^{-2t} + c_2(t) e^{3t} = -\frac{1}{5} t e^{-2t} - e^{-5t} \cdot e^{3t}$$

$$\boxed{y_p(t) = -\frac{1}{5} t e^{-2t} - e^{-2t}}$$

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{5} t e^{2t} - e^{-2t}}$$

iv) $y(0) = 0$ $\qquad y(0) = c_1 + c_2 - 1 = 0 \longrightarrow c_1 = 1 - c_2$

$$y'(0) = -2c_1 + 3c_2 - \frac{1}{5} + 2 = 1$$

$$\Longrightarrow -2 + 2c_2 + 3c_2 = -4/5$$

$$5c_2 = \frac{6}{5} \longrightarrow \boxed{c_2 = \frac{6}{25}} \qquad c_1 = 1 - \frac{6}{25}$$

$$y(t) = \left(1 - \frac{6}{25}\right)e^{-2t} + \frac{6}{25}e^{3t} - \frac{1}{5}te^{-2t} - 1 \cdot e^{-2t}$$

$$= -\frac{6}{25}e^{-2t} + \frac{6}{25}e^{3t} - \frac{1}{5}te^{-2t}$$

natürlich wie auf Seite 12