Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 6 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme

Gesucht : **Funktion** $\boldsymbol{u} : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{u}}(t) \;=\; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}(t)}$$

genauer: Bei bekannten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ wird gesucht $\boldsymbol{u}$ mit

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) \;:=\; \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Zugehöriges homogenes System

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{u}}_h(t) \;=\; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}_h(t)}$$

$b(t) = 0$

Sind $\boldsymbol{u}^{[1]}$ und $\boldsymbol{u}^{[2]}$ Lösungen der **homogenen** Dgl. , d.h.

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{[1]}(t) \;=\; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[1]}(t), \quad \dot{\boldsymbol{u}}^{[2]}(t) \;=\; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[2]}(t)$$

so ist auch jede Linearkombination von $\boldsymbol{u}^{[1]}$ und $\boldsymbol{u}^{[2]}$ Lösung der hom. Dgl.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\alpha\boldsymbol{u}^{[1]}+\beta\boldsymbol{u}^{[2]}\right) &= \alpha\dot{\boldsymbol{u}}^{[1]}+\beta\dot{\boldsymbol{u}}^{[2]} = \alpha\,\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[1]}+\beta\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[2]}\\ &= \boldsymbol{A}(t)\,(\alpha\boldsymbol{u}^{[1]})+\boldsymbol{A}(t)\,(\beta\boldsymbol{u}^{[2]}) = \boldsymbol{A}(t)\,(\alpha\boldsymbol{u}^{[1]}+\beta\boldsymbol{u}^{[2]})\end{aligned}$$

- Die Menge der Lösungen bildet einen linearen Raum.

- Der Lösungsraum hat die Dimension $= n$, denn

  $\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}(t)$ mit $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{e}_j\,,\ j = 1,\cdots,n$ ist eindeutig lösbar.

  Die so erhaltenen n Lösungen sind linear unabhängig.

  Jede Anfangswertaufgabe lässt sich mit Linearkombination dieser Lösungen erfüllen.

- Die Allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet also

$$\boldsymbol{u}_h(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{u}^{[k]}(t)}_{c_1 u^{[1]}(t) + \dots + c_n u^{[n]}(t)} = \underbrace{\overbrace{\left(\boldsymbol{u}^{[1]}, \quad \boldsymbol{u}^{[2]}, \quad \dots \quad \boldsymbol{u}^{[n]}\right)}^{\text{Spalten}}}_{\text{Matrix } U} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: \underbrace{\boldsymbol{U}(t)} \cdot \mathbf{c}$$

Wobei die $\boldsymbol{u}^{[k]}$'s n linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl sind.

Die Funktionen $\boldsymbol{u}^{[1]}, \boldsymbol{u}^{[2]}, \dots, \boldsymbol{u}^{[n]}$ heißen **Fundamentalsystem**

Und $\boldsymbol{U}(t)$ heißt **Fundamentalmatrix**

Prüfung der linearen Unabhängigkeit:

Die Matrix $\boldsymbol{U}(t)$ ist für jedes t regulär

$\iff$

die **Wronski Determinante**

$\det(\boldsymbol{U}(t)) \neq 0$

für **irgendein** t aus dem Definitionsintervall von $\boldsymbol{u}$.

Beispiel A) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}}^{A(t)} \boldsymbol{u}(t) + \overbrace{\begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}}^{b(t)} \qquad t \geq 0.5$$

Behauptung: $\boldsymbol{U}(t) = (\boldsymbol{u}^{[1]}(t), \boldsymbol{u}^{[2]}(t)) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$

d.h. $u^{[1]}$, $u^{[2]}$ sind linear unabhängige Lösungen von

ist eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems

$$\dot{\boldsymbol{u}}_h(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}_h(t).$$

Beweis: 1) Prüfe ob $\boldsymbol{u}^{[1]}, \boldsymbol{u}^{[2]}$ überhaupt Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} 1/t^2 \\ -2/t^3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{u}}^{[1]} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t^2 \\ -\frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^3} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}^{[1]}$ ist also eine Lösgung des homogenen Systems. ✓

Für $\boldsymbol{u}^{[2]} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}^T$ rechnet man analog

$$\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{u}}^{[2]} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[2]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$\boldsymbol{u}^{[2]}$ ist also auch eine Lösung des homogenen Systems.

2) Prüfe lineare Unabhängigkeit: Rechne für $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$.

$$\det(\boldsymbol{U}(t_0)) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_0} & t_0^3 \\ \frac{1}{t_0^2} & 3t_0^2 \end{pmatrix} = -3t_0 - t_0 = -4t_0 \neq 0 \quad \forall t_0 \neq 0$$

Es genügt die Determinante für irgendein zulässiges t_0. Zum Beispiel

$$\det(\boldsymbol{U}(1)) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -3 - 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{U}(t)$ ist eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems.

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\boxed{\boldsymbol{u}_h(t) = c_1 \cdot \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2 \cdot \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Lösung des inhomogenen Systems $\boxed{\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}(t)}$

Wie im skalaren Fall

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{u}^{[k]}(t)}_{u_h} + \underbrace{u_p(t)}_{?} = \underbrace{\left(\boldsymbol{u}^{[1]} \quad \boldsymbol{u}^{[2]} \quad \dots \quad \boldsymbol{u}^{[n]}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{u_h} + u_p(t).$$

d.h. : Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems = allgemeine Lösung des homogenen Systems + eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

Variation der Konstanten

Wie im skalaren Fall mache bei bekanntem

$\boldsymbol{u}_h(t) = \boldsymbol{U}(t)\cdot\mathbf{c}$ d.h. $\dot{\boldsymbol{U}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)$

Den Ansatz $\boxed{\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t)\cdot\mathbf{c}(t)}$

Dgl verlangt:

$\dot{u}_p(t) = \dot{U}(t)\cancel{c(t)} + U(t)\dot{c}(t) \stackrel{!}{=} A(t)\cancel{U(t)}c(t) + b(t)$

Einsetzen in DGL liefert $\boxed{\boldsymbol{U}(t)\cdot\dot{\mathbf{c}}(t) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{b}(t)}$

Fortsetzung Beispiel A:

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \geq 0.5$$

Oben hatten wir das Fundamentalsystem $\boldsymbol{U}(t) = \begin{array}{cc} u^{[1]} & u^{[2]} \\ \end{array}\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$ (*)

Variation der Konstanten liefert den Ansatz: $\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t)\cdot\mathbf{c}(t)$.

$= \begin{pmatrix} u^{[1]} & u^{[2]} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = c_1(t)\,u^{[1]}(t) + c_2(t)\,u^{[2]}(t)$

Dies eingesetzt in die DGL liefert die Bedingung

$$\overset{\circledast}{\boldsymbol{U}}(t)\begin{pmatrix}\dot c_1(t)\\ \dot c_2(t)\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}$$

nur ausmultipliziert

$$\overset{\circledast}{\iff}\begin{pmatrix}-\frac{1}{t} & t^3\\ \frac{1}{t^2} & 3t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot c_1(t)\\ \dot c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\dot c_1(t)}{t}+t^3\cdot\dot c_2(t)\\ \frac{\dot c_1(t)}{t^2}+3t^2\cdot\dot c_2(t)\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}\cdot 3\\ \cdot t\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\mathrm{I}\\ \\ \mathrm{II}\end{matrix}\quad\iff\begin{cases}\frac{-3\dot c_1}{t}+3t^3\dot c_2 &= 3t\\ \frac{\dot c_1}{t}+3t^3\dot c_2 &= 3t\end{cases}\implies\frac{4}{t}\dot c_1=0$$

$$\mathrm{II}-\mathrm{I}\qquad \frac{\dot c_1}{t}+\frac{3\dot c_1}{t}=0\iff\frac{4}{t}\dot c_1=0$$

Damit folgt: $\dot c_1(t)=0$ und $3t^3\dot c_2=3t\implies\dot c_2(t)=\frac{1}{t^2}$

Also zum Beispiel: $c_1(t)=0$ $c_2(t)=-\frac{1}{t}$ und damit

$$\boldsymbol{u}_p(t):=\underbrace{\boldsymbol{U}(t)\cdot\mathbf{c}(t)}_{c_1(t)u^{[1]}(t)+c_2(t)u^{[2]}(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{t} & t^3\\ \frac{1}{t^2} & 3t^2\end{pmatrix}}_{U(t)}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/t & t^3\\ 1/t^2 & 3t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1/t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t^2\\ -3t\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet also

$$\boxed{\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_p = \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}}_{u_h} - \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}}_{u_p}}$$

c_1 und c_2 werden über Anfangs-/Randwerte bestimmt.

Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe zum Beispiel mit den Anfangswerten $\boldsymbol{u}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$t = 1$

$$\boldsymbol{u}(1) = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{1^2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1^3 \\ 3 \cdot 1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1^2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$-c_1 + c_2 = 3$$
$$+c_1 + 3c_2 = 5$$

$c_1 = -1$

$c_2 = 2$

$\Longrightarrow \vec{u}(t) = - \begin{pmatrix} -1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$

$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1/t + 2t^3 - t^2 \\ 1/t^2 + 6t^2 - 3t \end{pmatrix}$ Lösung der Anfangswertaufgabe

Problem: kein Rezept für das Fundamentalsystem bei $A(t)$ nicht konstant!

Lineare DGL-Systeme mit Konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}(t) \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ konstant}}$$

Lösung des homogenen Systems: $\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}(t).$

Ist λ_k ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}^{[k]}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so löst

Also $A v^{[k]} = \lambda_k v^{[k]}$

$$\boxed{\boldsymbol{u}^{[k]}(t) := e^{\lambda_k t} \cdot \boldsymbol{v}^{[k]}}$$

$$\dot{u}^{[k]} = \lambda_k e^{\lambda_k t} v^{[k]} = e^{\lambda_k t} A v^{[k]} = A \underbrace{e^{\lambda t} v^{[k]}}_{} = A u^{[k]}$$

das zugehörige homogene System.

Fall 1: es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}, \ldots, \boldsymbol{v}^{[n]}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{[1]}, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{[2]}, \ldots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}^{[n]}$$

bilden Fundamentalsystem, wobei nicht notwendig $\lambda_i \neq \lambda_j$

Fall 2: A nicht diagonalisierbar

Es gibt keine n linear unabhängige Eigenvektoren

$\exists \lambda_k : a(\lambda_k) > g(\lambda_k)$ also algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

Allgemeiner Fall: Siehe Vorlesung. Hier nur der Fall:

$\exists \lambda : a(\lambda) = 2 > 1 = g(\lambda)$

Bestimme Eigenvektor und Hauptvektor Stufe 1 zu λ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \quad &: \quad \text{Eigenvektor zum EW } \lambda : \\ & (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0 \\ \boldsymbol{w} \quad &: \quad \text{Hauptvektor Stufe 1 zum EW/EV } \lambda, \boldsymbol{v} \\ & (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) := e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \text{wie gehabt}$$

$$\boldsymbol{u}^{[2]}(t) := e^{\lambda t}\,[\,t \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}]$$

Beweis: Einsetzen

$$\dot{u}^{[2]}(t) = \lambda e^{\lambda t}\,[t\vec{v} + \vec{w}] + e^{\lambda t} \cdot 1 \cdot \vec{v}$$

$$A\,u^{[2]}(t) = A e^{\lambda t}\,[t\vec{v} + \vec{w}] = t e^{\lambda t} A\vec{v} + e^{\lambda t} A\vec{w}$$

$$\dot{u}^{[2]}(t) - A\,u^{[2]}(t) = e^{\lambda t}\left(\cancel{\lambda t \vec{v}} + \lambda\vec{w} + \vec{v} \cancel{- tA\vec{v}} - A\vec{w}\right) \qquad A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$= e^{\lambda t}\left(\underbrace{\vec{v} - (A - \lambda I)\,w}_{=0}\right)$$

aus der Definition von w

Beispiel B):

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Eigenwerte berechnen

Eigenwerte können auf der Diagonalen abgelesen werden:

$$\underset{a(2)=2}{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}, \quad \underset{a(3)=1}{\lambda_3 = 3}.$$

Schritt 2: Eigenvektoren und (falls nötig) Hauptvektoren

Zum Eigenwert 2 errechnet man

$(A-2I)\vec{v} =$
$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 0 = 0$
$-v_1 = 0$
$v_3 = 0$
$0 \neq v_2$ frei wählbar

EV : $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gibt (bis auf skalare Vielfache) nur den Eigenvektor (EV)

$$\boxed{v = (0,1,0)^T.}$$

$u^{[1]}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einen zugehörigen Hauptvektor errechnet man über

$$(A-2I)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V$$

$-w_1 = 1$
$w_3 = 0$
w_2 frei z.B. $w_2 = 0$

$$\boldsymbol{w} = (-1,0,0)^T.$$

$u^{[2]}(t) = e^{2t}(t \cdot v + w) = e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Lösungen zu $\lambda_1 = 2$ sind

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{2t}\boldsymbol{v} = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{2t}(t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\t\\0\end{pmatrix}.$$

Zum EW $\lambda_3 = 3$ erhält man für einen Eigenvektor $\hat{\boldsymbol{v}}$

$$(A-3I)\hat{v} = \begin{pmatrix}2-3 & 0 & 0\\ -1 & 2-3 & 0\\ 0 & 0 & 3-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{v}_2\\ \hat{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\boxed{\hat{v}_1 = 0}\\ -\hat{v}_1 - \boxed{\hat{v}_2 = 0}\\ 0 = 0\end{cases} \Longleftarrow \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$0 \neq \hat{v}_3$ frei wählbar

$u^{[3]}(t) = e^{\lambda_3 t}\vec{\hat{v}}$

$$\boldsymbol{u}^{[3]}(t) = e^{3t}\hat{\boldsymbol{v}} = e^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist also

$$\boxed{\boldsymbol{u}_h(t) = c_1\, e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u^{[1]}} + c_2\, e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}}_{u^{[2]}} + c_3\, e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^{[3]}}.}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

kann man über Variation der Konstanten berechnen oder über einen speziellen Ansatz (siehe Seite 20)

Ansatz $\vec{u}_p(t) = U(t) \cdot c(t)$

Über Variation der Konstanten: Zu lösen ist

$$\boldsymbol{U}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \boldsymbol{b}(t)$$

$b(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u^{[1]}$ $\quad u^{[2]}$ $\quad u^{[3]}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{c}_2(t) = -e^{2t} \\ \dot{c}_1(t) = (2+t)e^{2t} \\ \dot{c}_3(t) = 0 \end{cases}$$

z.B. $c_1(t) = \frac{-e^{2t}}{2}$

z.B. $c_3(t) = 0$

2. Zeile $\dot{c}_1(t)e^{2t} + te^{2t}\dot{c}_2(t) = \dot{c}_1(t)e^{2t} - te^{4t}\dot{c}_2(t) = 2e^{4t}$

$\Longrightarrow \dot{c}_1(t)e^{2t} = (2+t)e^{4t} \quad | \cdot e^{-2t} \quad \Longrightarrow \dot{c}_1(t) = (2+t)e^{2t}$

$$c_1(t) = \int \underbrace{(2+t)}_{f}\underbrace{e^{2t}}_{\dot{g}}dt = (2+t)\frac{e^{2t}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2t}}{2} dt = e^{2t}\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) + K$$

$\dot{f} = 1 \quad g = \frac{e^{2t}}{2}$

$\underbrace{f \cdot g}_{(1+\frac{t}{2})e^{2t}} - \int \dot{f} \cdot g$

$$\underbrace{\left(1+\frac{t}{2}\right)e^{2t} - \frac{e^{2t}}{4} + K}_{= \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{2t} + K}$$

Wir können also mit $k=0$

$$\mathbf{c}_1(t) = e^{2t}\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{3}{4}\right), \qquad c_2(t) = -\frac{e^{2t}}{2}, \qquad c_3(t) = 0$$

wählen und erhalten

$$\boldsymbol{u}_p(t) = c_1(t)\,\underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{u^{[1]}(t)} + c_2(t)\,\underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\t\\0\end{pmatrix}}_{u^{[2]}(t)} + c_3(t)\,\underbrace{e^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{u^{[3]}(t)}.$$

$$\boldsymbol{u}_p(t) = \underbrace{e^{2t}\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{3}{4}\right)}_{c_1(t)} \cdot e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{e^{2t}}{2}}_{c_2(t)} \cdot e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\t\\0\end{pmatrix} + \underbrace{0}_{c_3(t)} \cdot e^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= e^{4t}\left[\begin{pmatrix}0\\ \frac{t}{2}+\frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\ -t/2\\ 0\end{pmatrix}\right] = e^{4t}\begin{pmatrix}1/2\\ 3/4\\ 0\end{pmatrix}$$

und damit $\boxed{\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t)}$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{u}(t) = \underbrace{c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_h} + \underbrace{e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_p}.$$

Spezieller Ansatz für eine Lösung von:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}(t) + e^{\mu t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_p(t) := e^{\mu t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T$$

Hier

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also Ansatz

$$\boldsymbol{u}_p(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Wie a, b, c wählen damit $u_p(t)$ Lösung?

Einsetzen in das System ergibt $\dot{u}_p(t) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} u_p(t) + e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{u}_p(t) = 4e^{4t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{4t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{u_p(t)} + e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot e^{-4t}$$

$$\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2a + 1 \\ -a + 2b + 2 \\ 3c + 0 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem für a, b, c

$$4a = 2a + 1 \iff \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$4b = -a + 2b + 2 \overset{-2b}{\underset{a=1/2}{\iff}} 2b = 2 - \frac{1}{2} \iff \boxed{b = \frac{3}{4}}$$

$$4c = 3c \iff \boxed{c = 0.}$$

Ansatz war: $u_p(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow$

Also $\boldsymbol{u}_p(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung ist: $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t)$. wie oben Seite 20

Beispiel C: Ein homogenes System

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)\,.$$

1. Schritt: Eigenwerte

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2].$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

p, q

$\lambda = 2$ oder 3

$p(\lambda) = (\lambda-2)^2\,(\lambda-3)^2$

Es gilt also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\,, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3\,.$$

$a(2) = 2$ $\qquad$ $a(3) = 2$ $\qquad$ algebraische Vielfachheiten

2. Schritt:

Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert 2:

$$(A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow v_2 = 0$

$\Longrightarrow -v_2 + v_4 = 0 \Longrightarrow v_4 = 0$

$\Longrightarrow v_3 = 0$

$0 \neq v_1$ frei

Also $\boldsymbol{v} =$ z.B $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow u^{[1]}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zur doppelten Nullstelle 2 des Charakteristischen Polynoms gibt es nur eine Eigenvektorrichtung:

$$\boxed{a(2) = 2 > 1 = g(2)}$$

Es wird ein Hauptvektor benötigt

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$$

$\to w_2 = 1$

$-w_2 + w_4 = 0$

$\to w_4 = 1$

$\to w_3 = 0$

w_1 frei

z.B. Null

z.B. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu $\lambda = 2$ haben wir Zum Beispiel

Eigenvektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, zugehöriger Hauptvektor $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentallösungen

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{2t} \cdot \boldsymbol{v}}} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{2t} \cdot (t\overset{\text{EV}}{\boldsymbol{v}} + \overset{\text{HV}}{\boldsymbol{w}})}} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 3

$$(A-3I)\,\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{v}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} -\hat{v}_1 + \hat{v}_2 = 0 &\Longleftrightarrow \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ -2\hat{v}_2 + \hat{v}_4 = 0 &\Longleftrightarrow \hat{v}_4 = 2\hat{v}_2 \\ 0 = 0 & \\ -2\hat{v}_2 + \hat{v}_4 = 0 &\Longleftrightarrow \hat{v}_4 = 2\hat{v}_2 \end{aligned}$$

Wählt man $\hat{v}_1 = 1 \longrightarrow \hat{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ? \\ 2 \end{pmatrix}$ z.B. $\hat{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wählt man $\hat{v}_1 = 0$ folgt $\hat{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ? \\ 0 \end{pmatrix}$ z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir können die zwei linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\hat{\boldsymbol{v}}^{[1]} = (1,1,0,2)^T \qquad \hat{\boldsymbol{v}}^{[2]} = (0,0,1,0)^T$$

wählen. Damit erhält man die Fundamentallösungen

$$\boldsymbol{u}_3(t) = e^{3t} \cdot \overset{EV_1}{\hat{\boldsymbol{v}}^{[1]}} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_4(t) = e^{3t} \cdot \overset{EV_2}{\hat{\boldsymbol{v}}^{[2]}} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\boldsymbol{u}(t) = c_1\, \underbrace{e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u^{[1]}(t)} + c_2\, \underbrace{e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^{[2]}(t)} + c_3\, \underbrace{e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u^{[3]}(t)} + c_4\, \underbrace{e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u^{[4]}(t)} .$$

Beispiel D) Komplexe Eigenwerte

$$\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}\,.$$

Gesucht: reelles Fundamentalsystem

Schritt 1: Eigenwerte Berechnen

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \underline{(-3-\lambda)^2 + 4.}$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(-3-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -3 \pm 2i\,.$$

$$(-3-\lambda)^2 = -4 \qquad \sqrt{}$$

$$(-3-\lambda) = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \implies -3 \mp 2i = \lambda_{1,2}$$

Schritt 2: Eigenvektoren und (falls nötig) Hauptvektoren

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -3+2i$ errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} -3+3-2i & 2 \\ -2 & -3+3-2i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0$$

$$\iff (-\cancel{2}iv_1 + \cancel{2}v_2 = 0) \wedge (-2v_1 - 2iv_2 = 0).$$

$v_2 = iv_1$

$-2v_1 - 2i(iv_1) = 0 \iff -2v_1 + 2v_1 = 0$ ✓

Beide Gleichungen sind äquivalent mit $v_2 = iv_1$.

z.B. mit $v_1 = 1$ erhält man

Eigenvektor z.B.: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Zugehörige Fundamentallösung $\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{\overset{\lambda_1}{(-3+2i)}t} \overset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$

Der EV zu $\lambda_2 = -3 - 2i = \overline{\lambda_1}$ ist $\bar{\boldsymbol{v}}$

denn $Av = \lambda v$

$\Longleftrightarrow \overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$

$\overset{A \text{ reell}}{\Longleftrightarrow} A\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$

Also $\overline{v}$ EV zu $\overline{\lambda}$

Also $\boldsymbol{z}^{[2]}(t) = e^{(-3-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \overline{\boldsymbol{z}^{[1]}(t)}$

Allgemeine Lösung in $\mathbb{C}$: $k_1\boldsymbol{z}^{[1]}(t) + k_2\boldsymbol{z}^{[2]}(t), \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{C}$

Bestimmung einer reellen Darstellung der Lösung

Jede Linearkombi. von $\boldsymbol{z}^{[1]}, \boldsymbol{z}^{[2]}$ ist Lösung. Also auch

$\underset{\uparrow\, u^{[1]}}{\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{z}^{[1]})} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z}^{[1]} + \boldsymbol{z}^{[2]})$ und $\underset{\uparrow\, u^{[2]}}{\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{z}^{[1]})} = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{z}^{[1]} - \boldsymbol{z}^{[2]})$.

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) \;=\; e^{(-3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-3t} \cdot e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$z^{[1]}(t) = e^{-3t} \cdot \left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ -\sin(2t) + i\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Reelle Lösungen

$u^{[1]}(t) = \mathrm{Re}\left(z^{[1]}(t)\right)$ $\qquad$ $u^{[2]}(t) = \mathrm{Im}\left(z^{[1]}(t)\right)$

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) \;= e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^{[2]}(t) \;= e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine reelle Lösung des homogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{u}_h(t) = c_1\boldsymbol{u}^{[1]}(t) \;+\; c_2\boldsymbol{u}^{[2]}(t)\,. \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Zusammenfassung:

- Wir können im Prinzip jedes inhomogene Lineare System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen.

- Da Dgl $n-$ter Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung, können wir jede lineare Dgl $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen. Jetzt mit beliebigen Inhomogenitäten
  nicht nur Polynom. e-Funktion

- Bei variablen Koeffizienten können wir mit Hilfe eines Fundamentalsystems für die homogene Dgl auch eine Lösung für die inhomogene Dgl (V.d.K.) bestimmen.

- **Problem:** Kein allgemeines Rezept für ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl bei variablen Koeffizienten.

Gelegentlich hilft:

Reduktion der Ordnung/Dimension

Wenn man eine Lösung des homogenen Systems kennt, kann man die Ordnung bzw. die Dimension um eins reduzieren.

Hier nur Differentialgleichung zweiter Ordnung:

System funktioniert ähnlich

$$u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \;=\; b(t)$$

Bekannt sei Lösung $u_0(t)$ von $u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \;=\; 0$

D.h. $u_0'' + a_1(t)\, u_0' + a_0(t)\, u_0 = 0$ $(*)$

Ansatz für weitere Lösung: $\hat{u}(t) := w(t)u_0(t)$? ✓

$w'' \cdot u_0 + 2w'u_0' + u_0'' w + a_1(t)\left[w'u_0 + w u_0'\right] + a_0(t)\, w \cdot u_0 \overset{!}{=} b(t)$

ergibt eingesetzt in Differentialgleichung

Umsortieren $w'' u_0 + (2u_0' + a_1(t)\, u_0) w' + \underbrace{(u_0'' + a_1(t) u_0' + a_0(t) u_0)}_{=0 \; (*)} w \overset{!}{=} b(t)$

$$w''(t) + \left(\frac{2u_0'(t)}{u_0(t)} + a_1(t)\right) w'(t) = \frac{b(t)}{u_0(t)}$$

$\Longrightarrow w'' + \dfrac{2u_0' + a_1(t) u_0}{u_0} w' \overset{!}{=} \dfrac{b(t)}{u_0}$

Differentialgleichung erster Ordnung für $y(t) = w'(t)$.

Beispiel:

$$u''(t) + \tfrac{5}{t}u'(t) + \tfrac{4}{t^2}u(t) \;=\; 0, \qquad e^1 \le t \le e^2.$$

Geratener Ansatz: $u_0(t) \;=\; t^k$

wegen der Koeffizienten

k bestimmen, so dass

$u_0'' + \frac{5}{t} u_0' + \frac{4}{t^2} u_0 = 0$

Einsetzten in die homogene Differentialgleichung

$$u''(t) + \tfrac{5}{t}u'(t) + \tfrac{4}{t^2}u(t) \;=\; 0$$

$u_0' = k t^{k-1}$

$u_0'' = k \cdot (k-1) t^{k-2}$

Liefert

$$k(k-1)t^{k-2} + \tfrac{5}{t}kt^{k-1} + \tfrac{4}{t^2}t^k \;=\; 0 \iff t^{k-2}\left[k(k-1) + 5k + 4\right] = 0$$

$$\overset{t \neq 0}{\iff} (\underbrace{k(k-1) + 5k + 4}_{k^2+4k+4=0})t^{k-2} = 0 \Longrightarrow k = -2 \Longrightarrow \boxed{u_0(t) = t^{-2}}$$

$\iff (k+2)^2 = 0$

Für den Ansatz $\hat{u}(t) = w(t)t^{-2}$ gilt mit

$a_1(t) = \frac{5}{t}$ und $u_0'(t) = -2t^{-3}$

$$\frac{2(-2t^{-3})}{t^{-2}} + \frac{5}{t} = \frac{-4}{t} + \frac{5}{t} = \frac{1}{t}$$

$$w''(t) + \left(\overbrace{\frac{2u_0'(t)}{u_0(t)} + a_1(t)}\right) w'(t) = 0$$

$$\iff w''(t) + \underbrace{\frac{1}{t}}w'(t) = 0, \qquad \text{mit } y(t) = w'(t)$$

also $w'' = y'$

folgt $y' + \frac{1}{t}y = 0$

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y \implies \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dt}{t}$$

separierbar

$$\ln(|y|) = -\ln(t) + \hat{c} \stackrel{\text{exp}}{\implies} |y| = e^{-\ln(t)+\hat{c}} = e^{-\ln(t)} \cdot e^{\hat{c}} = \frac{1}{e^{\ln(t)}} \cdot c = \frac{c}{t}$$

$$y(t) = w'(t) = \frac{c}{t} \implies w(t) = c\ln(t) + \tilde{c}$$

Wähle zum Beispiel $w(t) = \ln(t)$ also $\hat{u}(t) = \overbrace{\ln(t)t^{-2}}^{w(t)\cdot u_0(t)}$ und

$$\boxed{u(t) = c_1u_0(t) + c_2\hat{u}(t) = c_1t^{-2} + c_2\ln(t)t^{-2}}$$

c_1, c_2 über Randwerte. oder Anfangswerte

Beispiel: Randwerte $u(e^1) = 0$, $u(e^2) = 1$. (vorgegeben)

$$u(t) = c_1 t^{-2} + c_2 = c_1 t^{-2} + c_2 \ln(t) t^{-2}$$

$$u(e^1) = c_1 (e^1)^{-2} + c_2 \underbrace{\ln(e^1)}_{1} (e^1)^{-2} = (c_1 + c_2)\, e^{-2} \overset{!}{=} 0 \implies \boxed{c_2 = -c_1}$$

$$u(e^2) = c_1 (e^2)^{-2} + c_2 \underbrace{\ln(e^2)}_{2} (e^2)^{-2}$$

$$= c_1 e^{-4} - c_1 \cdot 2 \cdot e^{-4} = -c_1 e^{-4} \overset{!}{=} 1 \qquad c_1 = -\frac{1}{e^{-4}} = -e^4 = -c_2$$

$$u(t) = -e^4 t^{-2} + e^4 \ln(t) \cdot t^{-2}$$

eindeutige Lösung der Randwertaufgabe

Dagegen zum Beispiel bei gleicher Dgl für $1 < t < e^{\frac{1}{2}}$

Mit Randbedingungen

$$u(1) = 0,\ u'(e^{\frac{1}{2}}) = 1.$$

$$u(t) = c_1 t^{-2} + c_2 \ln(t) t^{-2} \qquad \text{(wie gehabt)}$$

$$u(1) = c_1 (1)^{-2} + c_2 \underbrace{\ln(1)}_{0} (1)^{-2} = 0 \Longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\Longrightarrow u(t) = c_2 \ln(t) t^{-2}$$

$$u'(t) = c_2 \left[t^{-3} + \ln(t)(-2) t^{-3} \right]$$

$$u'(e^{\frac{1}{2}}) = c_2 \left[(e^{\frac{1}{2}})^{-3} + \underbrace{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}_{1/2} (-2) \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} \right] \stackrel{!}{=} 1$$

$$= c_2 \left[e^{-3/2} \cdot \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{2}(-2)\right)}_{0} \right] \stackrel{!}{=} 1 \quad ↯$$

Randwertaufgabe hat keine Lösung!

Existenz und Eindeutigkeit bei Randwertaufgaben komplizierter als bei Anfangswertauf.