Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 6 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme

Gesucht : **Funktion** $\boldsymbol{u} : \; D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\;\dot{\boldsymbol{u}}(t) \; = \; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}(t)\;}$$

genauer: Bei bekannten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ wird gesucht $\boldsymbol{u}$ mit

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) \; := \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Zugehöriges homogenes System

$$\boxed{\;\dot{\boldsymbol{u}}_h(t) \; = \; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}_h(t)\;}$$

Sind $\boldsymbol{u}^{[1]}$ und $\boldsymbol{u}^{[2]}$ Lösungen der **homogenen** Dgl. , d.h.

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{[1]}(t) \; = \; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[1]}(t), \quad \dot{\boldsymbol{u}}^{[2]}(t) \; = \; \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[2]}(t)$$

so ist auch jede Linearkombination von $\boldsymbol{u}^{[1]}$ und $\boldsymbol{u}^{[2]}$ Lösung der hom. Dgl.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha \boldsymbol{u}^{[1]} + \beta \boldsymbol{u}^{[2]}\right) &= \alpha \dot{\boldsymbol{u}}^{[1]} + \beta \dot{\boldsymbol{u}}^{[2]} = \alpha\, \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{u}^{[1]} + \beta \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{u}^{[2]} \\ &= \boldsymbol{A}(t)\,(\alpha \boldsymbol{u}^{[1]}) + \boldsymbol{A}(t)\,(\beta \boldsymbol{u}^{[2]}) = \boldsymbol{A}(t)\,(\alpha \boldsymbol{u}^{[1]} + \beta \boldsymbol{u}^{[2]}) \end{aligned}$$

- Die Menge der Lösungen bildet einen linearen Raum.

- Der Lösungsraum hat die Dimension $= n$, denn

  $\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{u}(t)$ mit $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{e}_j\,,\ j = 1, \cdots, n$ ist eindeutig lösbar.

  Die so erhaltenen n Lösungen sind linear unabhängig.

  Jede Anfangswertaufgabe lässt sich mit Linearkombination dieser Lösungen erfüllen.

- Die Allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet also

$$\boldsymbol{u}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{u}^{[k]}(t) = \left(\boldsymbol{u}^{[1]}, \quad \boldsymbol{u}^{[2]}, \quad \dots \quad \boldsymbol{u}^{[n]}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}$$

Wobei die $\boldsymbol{u}^{[k]}$'s n linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl sind.

Die Funktionen $\boldsymbol{u}^{[1]}, \boldsymbol{u}^{[2]}, \dots, \boldsymbol{u}^{[n]}$ heißen **Fundamentalsystem**

Und $\boldsymbol{U}(t)$ heißt **Fundamentalmatrix**

Prüfung der linearen Unabhängigkeit:
Die Matrix $\boldsymbol{U}(t)$ ist für jedes t regulär
$\iff$
die **Wronski Determinante**
det$(\boldsymbol{U}(t)) \neq 0$
für **irgendein** t aus dem Definitionsintervall von $\boldsymbol{u}$.

Beispiel A) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \geq 0.5$$

Behauptung: $\quad \boldsymbol{U}(t) = \left(\boldsymbol{u}^{[1]}(t), \, \boldsymbol{u}^{[2]}(t)\right) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$

ist eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems

$$\dot{\boldsymbol{u}}_h(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}_h(t).$$

Beweis: 1) Prüfe ob $\boldsymbol{u}^{[1]}, \boldsymbol{u}^{[2]}$ überhaupt Lösungen sind

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{[1]} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}^{[1]}$ ist also eine Lösgung des homogenen Systems.

Für $\boldsymbol{u}^{[2]} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}^T$ rechnet man analog

$$\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{u}}^{[2]} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}^{[2]}$ ist also auch eine Lösung des homogenen Systems.

2) Prüfe lineare Unabhängigkeit: Rechne für $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$.

$$\det(\boldsymbol{U}(t_0)) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_0} & t_0^3 \\ \frac{1}{t_0^2} & 3t_0^2 \end{pmatrix}$$

Es genügt die Determinante für irgendein zulässiges t_0. Zum Beispiel

$$\det(\boldsymbol{U}(1)) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -3 - 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{U}(t)$ ist eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems.

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\boldsymbol{u}_h(t) = c_1 \cdot \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2 \cdot \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}$$

Lösung des inhomogenen Systems $\boxed{\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}(t)}$

Wie im skalaren Fall

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t) &= \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{u}^{[k]}(t) + u_p(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{[1]} & \boldsymbol{u}^{[2]} & \dots & \boldsymbol{u}^{[n]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + u_p(t).\end{aligned}$$

d.h. : Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems = allgemeine Lösung des homogenen Systems + eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

Variation der Konstanten

Wie im skalaren Fall mache bei bekanntem

$\boldsymbol{u}_h(t) = \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}$ d.h. $\dot{\boldsymbol{U}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)$

Den Ansatz $\boxed{\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t)}$ $\dot{u}_p(t) = \dot{U}(t)c(t) + U(t)\dot{c}(t) \stackrel{!}{=} A(t)U(t)c(t) + b(t)$

Einsetzen in DGL liefert $\boxed{\boldsymbol{U}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{b}(t)}$

Fortsetzung Beispiel A:

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \geq 0.5$$

Oben hatten wir das Fundamentalsystem $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & t^3 \\ \frac{1}{t^2} & 3t^2 \end{pmatrix}$

Variation der Konstanten liefert den Ansatz: $\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$.

Dies eingesetzt in die DGL liefert die Bedingung

$$\boldsymbol{U}(t)\begin{pmatrix}\dot{c}_1(t)\\ \dot{c}_2(t)\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}t\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}-\frac{1}{t} & t^3\\ \frac{1}{t^2} & 3t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{c}_1(t)\\ \dot{c}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\dot{c}_1(t)}{t} + t^3\cdot\dot{c}_2(t)\\ \frac{\dot{c}_1(t)}{t^2} + 3t^2\cdot\dot{c}_2(t)\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}t\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\frac{-3\dot{c}_1}{t} + 3t^3\dot{c}_2 & = 3t\\ \frac{\dot{c}_1}{t} + 3t^3\dot{c}_2 & = 3t\end{cases} \implies \frac{4}{t}\dot{c}_1 = 0$$

Damit folgt: $\dot{c}_1(t) = 0$ und $3t^3\dot{c}_2 = 3t \implies \dot{c}_2(t) =$

Also zum Beispiel: $c_1(t) =$ $c_2(t) =$ und damit

$$\boldsymbol{u}_p(t) := \boldsymbol{U}(t)\cdot\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{t} & t^3\\ \frac{1}{t^2} & 3t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet also

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_p \;=\; c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \;+\; c_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \;-\; \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

c_1 und c_2 werden über Anfangs-/Randwerte bestimmt.

Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe zum Beispiel mit den Anfangswerten $\boldsymbol{u}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{u}(1) = \; c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{1^2} \end{pmatrix} \;+\; c_2 \begin{pmatrix} 1^3 \\ 3 \cdot 1^2 \end{pmatrix} \;-\; \begin{pmatrix} 1^2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$-c_1 + c_2 = 3$
$+c_1 + 3c_2 = 5$

Lineare DGL-Systeme mit Konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\boldsymbol{u}'(t) \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}(t) \;+\; \boldsymbol{b}(t) \qquad \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \text{konstant}}$$

Lösung des homogenen Systems: $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}(t)$.

Ist λ_k ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}^{[k]}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so löst

$$\boxed{\boldsymbol{u}^{[k]}(t) \;:=\; e^{\lambda_k t}\cdot\boldsymbol{v}^{[k]}}$$

das zugehörige homogene System.

Fall 1: es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}^{[1]},\, \boldsymbol{v}^{[2]},\, \dots\, ,\, \boldsymbol{v}^{[n]}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{[1]},\, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{[2]},\, \dots\, ,\, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}^{[n]}$$

bilden Fundamentalsystem, wobei nicht notwendig $\lambda_i \neq \lambda_j$

Fall 2: A nicht diagonalisierbar

Es gibt keine n linear unabhängige Eigenvektoren

$\exists\lambda_k : a(\lambda_k) > g(\lambda_k)$ also algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

Allgemeiner Fall: Siehe Vorlesung. Hier nur der Fall:

$\exists\lambda : a(\lambda) = 2 > 1 = g(\lambda)$

Bestimme Eigenvektor und Hauptvektor Stufe 1 zu λ

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{v} & : & \text{Eigenvektor zum EW } \lambda : \\ & & (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0 \\ \boldsymbol{w} & : & \text{Hauptvektor Stufe 1 zum EW/EV } \lambda, \boldsymbol{v} \\ & & (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \end{array}$$

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) := e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \text{wie gehabt}$$

$$\boldsymbol{u}^{[2]}(t) := e^{\lambda t} \left[t \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \right]$$

Beispiel B):

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Eigenwerte berechnen

Eigenwerte können auf der Diagonalen abgelesen werden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\,, \quad \lambda_3 = 3.$$

Schritt 2: Eigenvektoren und (falls nötig) Hauptvektoren

Zum Eigenwert 2 errechnet man

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt (bis auf skalare Vielfache) nur den Eigenvektor (EV)

$v = (0, 1, 0)^T$.

Einen zugehörigen Hauptvektor errechnet man über

$$(A - 2I)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{w} = (-1, 0, 0)^T$.

Lösungen zu $\lambda_1 = 2$ sind

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{2t}\boldsymbol{v} = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{2t}(t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum EW $\lambda_3 = 3$ erhält man für einen Eigenvektor $\hat{\boldsymbol{v}}$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\hat{v}_1 = 0 \\ -\hat{v}_1 - \hat{v}_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftarrow \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}^{[3]}(t) = e^{3t}\hat{\boldsymbol{v}} = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist also

$$\boldsymbol{u}_h(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann man über Variation der Konstanten berechnen oder über einen speziellen Ansatz (siehe Seite 20)

Über Variation der Konstanten: Zu lösen ist

$$\boldsymbol{U}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \boldsymbol{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{c}_2(t) = -e^{2t} \\ \dot{c}_1(t) = (2+t)e^{2t} \\ \dot{c}_3(t) = 0 \end{cases}$$

$$c_1(t) = \int (2+t)e^{2t}dt = (2+t)\frac{e^{2t}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2t}}{2} = e^{2t}(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}) + K$$

Wir können also

$$\mathbf{c}_1(t) = e^{2t}(\tfrac{t}{2} + \tfrac{3}{4}), \qquad c_2(t) = -\frac{e^{2t}}{2}, \qquad c_3(t) = 0$$

wählen und erhalten

$$\boldsymbol{u}_p(t) = c_1(t)\, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3(t)\, e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{u}_p(t) = e^{2t}(\tfrac{t}{2} + \tfrac{3}{4}) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{e^{2t}}{2} \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t)$

$$\boldsymbol{u}(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; c_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; c_3\, e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spezieller Ansatz für eine Lösung von:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}(t) + e^{\mu t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_p(t) := e^{\mu t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T$$

Hier

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also Ansatz

$$\boldsymbol{u}_p(t) =$$

Einsetzen in das System ergibt

$$4e^{4t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot e^{4t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem für a, b, c

$$4a = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}$$

$$4b = -a + 2b + 2 \iff 2b = 2 - \frac{1}{2} \iff b = \frac{3}{4}$$

$$4c = 3c \iff c = 0.$$

Also $\boldsymbol{u}_p(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung ist: $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_h(t) + \boldsymbol{u}_p(t)$.

Beispiel C: Ein homogenes System

$$\boldsymbol{u}'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)\,.$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \;(2-\lambda)(3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \;(2-\lambda)(3-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2].$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Es gilt also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\,, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3\,.$$

Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

Also $\boldsymbol{v} =$

Zur doppelten Nullstelle 2 des Charakteristischen Polynoms gibt es nur eine Eigenvektorrichtung:

$$a(2) = 2 > 1 = g(2)$$

Es wird ein Hauptvektor benötigt

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$$

Zu $\lambda = 2$ haben wir Zum Beispiel

Eigenvektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, zugehöriger Hauptvektor $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentallösungen

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{2t} \cdot \boldsymbol{v} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{2t} \cdot (t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 3

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{v}} \;=\; 0$$

$$\iff \qquad \begin{aligned} -\hat{v}_1 + \hat{v}_2 = 0 &\iff \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ -2\hat{v}_2 + \hat{v}_4 = 0 &\iff \hat{v}_4 = 2\hat{v}_2 \\ 0 = 0 & \\ -2\hat{v}_2 + \hat{v}_4 = 0 &\iff \hat{v}_4 = 2\hat{v}_2 \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}^{[1]} = (1,1,0,2)^T \qquad \hat{\boldsymbol{v}}^{[2]} = (0,0,1,0)^T$$

wählen. Damit erhält man die Fundamentallösungen

$$\boldsymbol{u}_3(t) = e^{3t} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^{[1]} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_4(t) = e^{3t} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^{[2]} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\boldsymbol{u}(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_4\, e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Beispiel D) Komplexe Eigenwerte

$$\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} \, .$$

Gesucht: reelles Fundamentalsystem

Schritt 1: Eigenwerte Berechnen

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)^2 + 4.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(-3-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -3 \pm 2i \, .$$

Schritt 2: Eigenvektoren und (falls nötig) Hauptvektoren
Zum Eigenwert $\lambda_1 = -3 + 2i$ errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} -3+3-2i & 2 \\ -2 & -3+3-2i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \;=\; \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow\; (-2iv_1 + 2v_2 = 0) \wedge (-2v_1 - 2iv_2 = 0).$$

Beide Gleichungen sind äquivalent mit $v_2 = iv_1$.

Eigenvektor z.B.: $\quad \boldsymbol{v} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Zugehörige Fundamentallösung $\boldsymbol{z}^{[1]}(t) \;=\; e^{(-3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Der EV zu $\lambda_2 = -3 - 2i = \overline{\lambda_1}$ ist $\bar{\boldsymbol{v}}$

Also $\boldsymbol{z}^{[2]}(t) = e^{(-3-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \overline{\boldsymbol{z}^{[1]}(t)}$

Allgemeine Lösung in $\mathbb{C}: \ k_1\boldsymbol{z}^{[1]}(t) + k_2\boldsymbol{z}^{[2]}(t), \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{C}$

Bestimmung einer reellen Darstellung der Lösung

Jede Linearkombi. von $\boldsymbol{z}^{[1]}, \boldsymbol{z}^{[2]}$ ist Lösung. Also auch

$\operatorname{Re}(\boldsymbol{z}^{[1]}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z}^{[1]} + \boldsymbol{z}^{[2]})$ und $\operatorname{Im}(\boldsymbol{z}^{[1]}) = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{z}^{[1]} - \boldsymbol{z}^{[2]})$.

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) \;=\; e^{(-3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \; e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ -\sin(2t) + i\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Reelle Lösungen

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{u}_h(t) = c_1\boldsymbol{u}^{[1]}(t) \; + \; c_2\boldsymbol{u}^{[2]}(t)\,.$$

Zusammenfassung:

- Wir können im Prinzip jedes inhomogene Lineare System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen.

- Da Dgl $n-$ter Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung, können wir jede lineare Dgl $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen.

- Bei variablen Koeffizienten können wir mit Hilfe eines Fundamentalsystems für die homogene Dgl auch eine Lösung für die inhomogene Dgl (V.d.K.) bestimmen.

- **Problem:** Kein allgemeines Rezept für ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl bei variablen Koeffizienten.

Reduktion der Ordnung/Dimension

Wenn man eine Lösung des homogenen Systems kennt, kann man die Ordnung bzw. die Dimension um eins reduzieren.

Hier nur Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \;=\; b(t)$

Bekannt sei Lösung $u_0(t)$ von $u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \;=\; 0$

Ansatz für weitere Lösung: $\hat{u}(t) := w(t)u_0(t)$

ergibt eingesetzt in Differentialgleichung

$$w''(t) + \left(\frac{2u_0'(t)}{u_0(t)} + a_1(t)\right) w'(t) = \frac{b(t)}{u_0(t)}$$

Differentialgleichung erster Ordnung für $y(t) = w'(t)$.

Beispiel:

$$u''(t) + \tfrac{5}{t}u'(t) + \tfrac{4}{t^2}u(t) \;=\; 0, \qquad e^1 \le t \le e^2.$$

Geratener Ansatz: $u_0(t) = \; t^k$

Einsetzten in die homogene Differentialgleichung

$$u''(t) + \tfrac{5}{t}u'(t) + \tfrac{4}{t^2}u(t) \;=\; 0$$

Liefert

$$k(k-1)t^{k-2} + \tfrac{5}{t}kt^{k-1} + \tfrac{4}{t^2}t^k \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow\; (k(k-1) + 5k + 4)t^{k-2} = 0 \Longrightarrow k = -2 \Longrightarrow\; u_0(t) = t^{-2}$$

Für den Ansatz $\hat{u}(t) = w(t)t^{-2}$ gilt mit

$a_1(t) = \frac{5}{t}$ und $u_0'(t) = -2t^{-3}$

$$w''(t) + \left(\frac{2u_0'(t)}{u_0(t)} + a_1(t)\right) w'(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow w''(t) + \frac{1}{t}w'(t) = 0, \qquad \text{mit } y(t) = w'(t)$$

$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t}$

$\ln(|y|) = -\ln(t) + \hat{c} \implies |y| = e^{-\ln(t)+\hat{c}} = e^{-\ln(t)} \cdot e^{\hat{c}}$

$y(t) = w'(t) = \frac{c}{t} \implies w(t) = c\ln(t) + \tilde{c}$

Wähle zum Beispiel $w(t) = \ln(t)$ also $\hat{u}(t) = \ln(t)t^{-2}$ und

$$u(t) = c_1 u_0(t) + c_2\hat{u}(t) = c_1 t^{-2} + c_2 \ln(t) t^{-2}$$

c_1, c_2 über Randwerte.

Beispiel: Randwerte $u(e^1) = 0$, $u(e^2) = 1$.

$$u(t) = c_1 t^{-2} + c_2 = c_1 t^{-2} + c_2 \ln(t) t^{-2}$$

$$u(e^1) = c_1 (e^1)^{-2} + c_2 \ln(e^1)(e^1)^{-2}$$

$$u(e^2) = c_1 (e^2)^{-2} + c_2 \ln(e^2)(e^2)^{-2}$$

Dagegen zum Beispiel bei gleicher Dgl für $1 < t < e^{\frac{1}{2}}$

Mit Randbedingungen

$$u(1) = 0,\ u'(e^{\frac{1}{2}}) = 1.$$

$$u(t) = c_1 t^{-2} + c_2 \ln(t) t^{-2} \qquad \text{(wie gehabt)}$$

$$u(1) = c_1 (1)^{-2} + c_2 \ln(1)(1)^{-2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u(t) = c_2 \ln(t) t^{-2}$$

$$u'(t) = c_2 \left[t^{-3} + \ln(t)(-2) t^{-3} \right]$$

$$u'(e^{\frac{1}{2}}) = c_2 \left[(e^{\frac{1}{2}})^{-3} + \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)(-2)\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} \right] \stackrel{!}{=} 1$$