Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 5 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

mit konstanten Koeffizienten

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gesucht $u : D \to \mathbb{R}^1, \quad D \subset \mathbb{R}^1$ mit

homogen

$$\boxed{\mathcal{L}[u] = u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ gegebene reelle Zahlen sind.

V: Die Lösungsmenge bildet einen linearen Raum der Dimension n.

Mit einer Basis $u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)$ lässt sich jede Lösung schreiben als

$$\boxed{u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u^{[k]}(t) = c_1 u^{[1]}(t) + c_2 u^{[2]}(t) + \ldots + c_n u^{[n]}(t)}$$

wobei $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten sind.

Beispiel A:

$$\mathcal{L}[u] = u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0$$

Für $u(t) = e^{\lambda t} \Longrightarrow u'(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\mathcal{L}[u] = \lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda e^{\lambda t} + 2 e^{\lambda t} = \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^2 + 3\lambda + 2)}_{\stackrel{!}{=} 0} \stackrel{!}{=} 0$$

$u(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung von $u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

$u^{[1]}(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-1 \cdot t}$
$u^{[2]}(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-2t}$ sind Lösungen

Allgemeine Lösung $\quad u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Beobachtung: Für

$$\mathcal{L}[u] = u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 u'(t) + a_0 u(t)$$

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t}$$

gilt, wegen $\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}}$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t}$ ist genau dann eine Lösung der Dgl $\mathcal{L}[u] = 0$ wenn λ Nullstelle des zugehörigen

Charakteristischen Polynoms

$$\boxed{P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0}$$

ist. Das Polynom hat unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n (komplexe) Nullstellen.

Ist λ_k eine Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist $e^{\lambda_k t}$ Lösung der Dgl.

Ist λ_k doppelte Nullstelle von $P(\lambda)$, so sind $e^{\lambda_k t}$, $t^1 e^{\lambda_k t}$ Lösungen der Dgl.

Ist λ_k dreifache Nullstelle von $P(\lambda)$, so sind $e^{\lambda_k t}$, $t^1 e^{\lambda_k t}$, $t^2 e^{\lambda_k t}$ Lösungen

und so weiter... (vgl. S.40 Vorlesung)

Mit allen Nullstellen erhält man so eine Basis des Lösungsraums/ein

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)$.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$u(t) = c_1 u^{[1]}(t) + \cdots + c_n u^{[n]}(t), \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \text{ bzw. } \mathbb{R}$$

.

Beispiele:

A) $1u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0, \qquad u(0) = 3,\ u'(0) = 1$

Dimension des Lösungsraums $=$ 2

Charakteristisches Polynom: $1 \cdot \lambda^2 + 3\lambda^1 + 2\lambda^0 = 0$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_1 = -1 \quad , \lambda_2 = -2 \, .$$

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t) = e^{-t} \qquad u^{[2]}(t) = e^{-2t}$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} . \qquad u'(t) = -c_1 e^{-t} + (-2) c_2 e^{-2t}$$

Anfangswerte:

$$u(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 3$$

$$u'(0) = -c_1 e^0 - 2c_2 e^0 = -c_1 - 2c_2 \overset{!}{=} 1$$

$+ \quad -c_2 = 4 \implies \boxed{c_2 = -4}$

$c_1 - 4 = 3 \implies \boxed{c_1 = 7}$

Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(t) = 7e^{-t} - 4e^{-2t}$$

B) $1u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 0, \qquad u(0) = 3, u'(0) = 1$

Dimension des Lösungsraums $=$ 2

Charakteristisches Polynom: $1 \cdot \lambda^2 - 4\lambda^1 + 4\lambda^0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = P(\lambda)$

$(\lambda-2)(\lambda-2)$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $\lambda = 2 \pm \sqrt{0}$

$\lambda_1 = 2 \quad , \lambda_2 = 2 \quad .$

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t) = e^{2t} \qquad u^{[2]}(t) = te^{2t}$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} \cdot t \quad \Rightarrow \quad u'(t) \underset{(*)}{=} 2c_1 e^{2t} + c_2 \left[2e^{2t} \cdot t + e^{2t} \cdot 1 \right]$

Anfangswerte:

$u(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 \cdot 0 = \boxed{c_1 \overset{!}{=} 3}$

$(*) \; u'(0) = 2c_1 e^0 + c_2 \left[2e^0 \cdot 0 + e^0 \right] = 2c_1 + c_2 = 6 + c_2 \overset{!}{=} 1$

$\Longrightarrow \boxed{c_2 = -5}$

Lösung der Anfangswertaufgabe

$u(t) = 3e^{2t} - 5te^{2t}$

C) $1u''(t) + 4u(t) = 0$ Dimension Lösungsraum = 2

Charakteristisches Polynom: $1 \cdot \lambda^2 + 0 \cdot \lambda^1 + 4\lambda^0 = \lambda^2 + 4 = P(\lambda)$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -4$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $\Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \cdot \underbrace{\sqrt{4}}_{2}$

$$\lambda_1 = 2i \quad , \lambda_2 = -2i.$$

Fundamentalsystem: $z^{[1]}(t) = e^{2it}$ $\qquad z^{[2]}(t) = e^{-2it}$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$u(t) = \hat{c}_1 e^{2it} + \hat{c}_2 e^{-2it}$$

Reelle Darstellung der Lösung = ?

Komplexe Nullstellen von P tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf!

$$P(\lambda) = 0 \iff \overline{P(\lambda)} = 0$$

$$\iff \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0} = 0$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\iff \overline{\lambda^n} + \overline{a_{n-1}\lambda^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\lambda} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\iff \overline{\lambda}^{\,n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\lambda}^{\,n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\lambda} + \overline{a_0} = 0$$

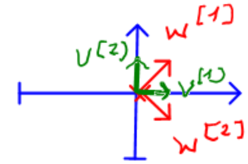
$$a_k \in \mathbb{R} \implies \overline{a_k} = a_k$$

$$\iff \overline{\lambda}^{\,n} + a_{n-1}\overline{\lambda}^{\,n-1} + \cdots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = 0$$

Basiswechsel z.B. $w^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff P(\overline{\lambda}) = 0$$

Wenn $z^{[1]}(t) = e^{(a+ib)t}$ Lösung, dann auch $z^{[2]}(t) = e^{(a-ib)t}$



Neue Basis

$$v^{[1]} := \frac{w^{[1]} + w^{[2]}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{w^{[1]} - w^{[2]}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: v^{[2]}$$

e^{at+ibt} $\quad e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$z^{[1]}(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = \underbrace{e^{at}\cos(bt)}_{Re(z^{[1]})} + i\underbrace{e^{at}\sin(bt)}_{Im(z^{[1]})}$$

$$z^{[2]}(t) = e^{(a-ib)t} = e^{at}e^{-ibt} = e^{at}(\underbrace{\cos(-bt)}_{\cos(bt)} + i\underbrace{\sin(-bt)}_{-\sin(bt)})$$

$$= e^{at}\cos(bt) - ie^{at}\sin(bt)$$

Linearkombinationen von Lösungen sind Lösungen. Wähle

$$u^{[1]}(t) := \frac{z^{[1]}(t) + z^{[2]}(t)}{2} = \frac{2e^{at}\cos(bt)}{2} = e^{at}\cos(bt) = Re(z^{[1]}(t))$$

$$u^{[2]}(t) := \frac{z^{[1]}(t) - z^{[2]}(t)}{2i} = \frac{2ie^{at}\sin(bt)}{2i} = e^{at}\sin(bt) = Im(z^{[1]}(t))$$

$\lambda_1 = 0 + 2it$ $\quad a = 0 \quad e^{at} = 1 \quad b = 2i$

Im Beispiel C) statt $z^{[1]}(t) = e^{2it}$, $z^{[2]}(t) = e^{-2it}$

$$u^{[1]}(t) := \mathrm{Re}\,(\overset{e^{2it}}{z^{[1]}(t)}) = \mathrm{Re}\,(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \cos(2t),$$

$$u^{[2]}(t) := \mathrm{Im}\,(z^{[1]}(t)) = \mathrm{Im}\,(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \sin(2t)$$

Allgemeine (reelle) Lösung: $\boxed{u(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t),}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Beispiel D: Gesucht sei reelle Darstellung der Lösung der Randwertaufgabe

$$1\,u''' + \underline{2u''} + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) u' = 0$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = 1.$$

Lösung:

Schritt 1: Nullstellen des charakteristischen Ploynoms

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)\lambda^1 = 0$$

$$\lambda \cdot \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \frac{\pi^2}{4}\right) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \frac{\pi^2}{4} = 0 \iff \lambda_{2,3} = -1 \pm i\,\frac{\pi}{2}$$

Schritt 2: Komplexes Fundamentalsystem:

$$e^{\lambda_1 t} = u^{[1]}(t) = e^{0\cdot t} = 1$$

$$e^{\lambda_2 t} = z^{[2]}(t) = e^{(-1+i\frac{\pi}{2})t} = e^{-t} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}t} = e^{-t}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$$e^{\lambda_3 t} = z^{[3]}(t) = e^{(-1-i\frac{\pi}{2})t}$$

$$= \underbrace{e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)}_{Re(z^{[2]}(t))} + i\underbrace{e^{-t}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)}_{Im(z^{[2]}(t))}$$

Schritt 3: Reelles Fundamentalsystem:

$$u^{[1]}(t) = 1$$

$$u^{[2]}(t) = e^{-t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$u^{[3]}(t) = e^{-t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Schritt 4: Allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 \underbrace{1}_{u^{[1]}} + c_2 \underbrace{e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)}_{u^{[2]}} + c_3 \underbrace{e^{-t}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)}_{u^{[3]}}.$$

Schritt 5: Anfangs-/Randwerte: $u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ u(1) = 1.$

$$u(t) = c_1 + e^{-t}\left(c_2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

ableiten mit Produktregel

$$u'(t) = e^{-t}\left(-c_2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - c_3\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - \tfrac{\pi}{2}c_2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \tfrac{\pi}{2}c_3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

$$u'(t) = e^{-t}\left(\left(-c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \left(-c_3 - \tfrac{\pi}{2}c_2\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

sortiert nach sinus/cosinus (muss nicht sein)

$$u(0) = c_1 + \underbrace{e^{-0}}_{1}\left(c_2\underbrace{\cos(0)}_{1} + c_3\cancel{\sin(0)}\right) = 0$$

$c_1 + c_2 = 0$

$c_2 = -c_1$

$$u(1) = c_1 + e^{-1}\left(c_2\cancel{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)} + c_3\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{1}\right) = 1$$

$c_1 + e^{-1}c_3 = 1$

$c_3 = (1-c_1)e^1$

$$u'(0) = -c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3 = c_1 + \tfrac{\pi}{2}(1-c_1)e^1 \overset{!}{=} 1 \iff c_1 = 1$$

$c_2 = -1 \qquad c_3 = 0$

Als Gleichungssystem geschrieben

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + e^{-1}c_3 &= 1 \\ -c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$u(t) = \underset{1}{c_1} \cdot e^0 + e^{-t}\left(\underset{-1}{c_2} \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \underset{0}{c_3} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right) = 1 - e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right).$$

Für H2: $\max_{t\geq 0} |u(t)|$

$$|u(t)| = \left|1 - e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right|$$

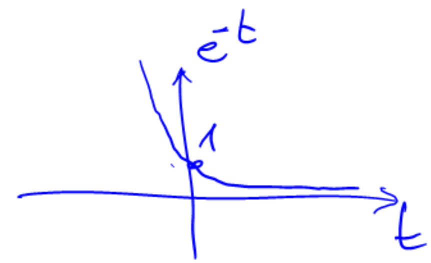
$$\leq |1| + \left|-e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right|$$

$$= 1 + \underbrace{|e^{-t}|}_{\substack{\leq 1 \\ \forall t \geq 0}} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$



Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gesucht $u : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{L}[u] = u^{(n)} + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t) \neq 0$$

V: Allgemeine Lösung $=$ Allgemeine Lösung der homogenen Dgl y_h

$+$ partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Partikuläre Lösung im allg. über Variation der Konstanten.
Bei speziellen Inhomogenitäten b oft einfacher: spezielle Ansätze.

Inhomogenität $b(t)$ (gegeben)	Ansatz für Lösung u_p
Polynom vom grad m $(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_m t^m) e^{\alpha t}$ $P(\alpha) \neq 0$	Polynom vom grad m $u_p(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m) e^{\alpha t}$ Ziel: Bestimme $b_0, b_1, \ldots, b_m$ so dass u_p Lösung der DgL
α $k-$fache Nullstelle von $P(\lambda)$	$u_p(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m) t^k e^{\alpha t}$
$\beta \cos(\alpha t)$ oder $\beta \sin(\alpha t)$ $\pm i\alpha$ keine Nullst. von $P(\lambda)$ $\pm i\alpha$ einfache Nst. von $P(\lambda)$	$u_p(t) := b \sin(\alpha t) + a \cos(\alpha t)$ $u_p(t) := t \cdot (b \sin(\alpha t) + a \cos(\alpha t))$

Beispiel E: Gesucht allgemeine Lösung der **inhomogenen** Dgl.

$$1u''' + 1u'' = 2 .$$

$P(\lambda) = 1 \cdot \lambda^3 + 1 \lambda^2$

Erst homogene Dgl

u_h : $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

$u^{[1]}(t) = e^{0t} = 1, \quad u^{[2]}(t) = te^{0t} = t, \quad u^{[3]}(t) = e^{-t}$

$$\boxed{u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.}$$

Jetzt inhomogene Dgl

u_p : Inhomogenität $b(t) = 2 \cdot e^{0t} = \underbrace{\text{Polynom 0-ten Grades}}_{b_0} \cdot \underset{e^{0t}}{e^{0t}} \cdot t^2$

0 ist doppelte Nullstelle von $P(\lambda)$

Ansatz

Ansatz für $u_p = b_0 \cdot e^0 \cdot t^2$

Einsetzen in die Dgl: $u_p' = 2b_0 t \quad u_p'' = 2b_0 \quad u_p''' = 0$

$u_p''' + u_p'' \overset{!}{=} 2 \qquad 0 + 2b_0 \overset{!}{=} 2 \implies \boxed{b_0 = 1}$

Also $u_p = 1 \cdot t^2$

$$\boxed{u_p = 1 \cdot t^2}$$

Allgemeine Lösung: $u(t) = \underbrace{c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}}_{u_h} + \underbrace{t^2}_{u_p}.$

Ansätze bei anderen Inhomogenitäten: für

$$u''' + u'' = \underset{k}{h}(t) \text{ mit } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1.$$

$$\boxed{u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.}$$

$h_1(t) = (t-1) e^{0t}$:

$\underbrace{\text{Polynom 1. Grades}}$. e^{0t} $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ doppelt} \\ \text{Nst von} \\ P(\lambda) \end{array} \right.$

Ansatz $(b_0 + b_1 t)\, e^{0t} \cdot t^2$

(*) $u_{p_1} = b_0 t^2 + b_1 t^3 \xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{in Dgl}} b_0, b_1$

$\xrightarrow{(*)} u_{p_1}$

$u = u_h + u_{p_1}$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$h_2(t) = t^2 e^t$

Polynom 2 Grades $\cdot e^{1\cdot t}$

$P(1) \neq 0$

$* \quad u_{p_2} = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)\, e^{1\cdot t}$ ...

$\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{in Dgl}} \quad b_0, \; b_1, \; b_2 \quad \xrightarrow{*} \quad u_{p_2}$

$u = u_h + u_{p_2}$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$$h_3(t) = \underline{12(t-1) + 3t^2 e^t} = 12 \cdot h_1(t) + 3 h_2(t)$$

$$u_p = 12 u_{p_1} + 3 u_{p_2}$$

$$\mathcal{L}(u_p) = \mathcal{L}(12 u_{p_1} + 3 u_{p_2}) = \mathcal{L}(12 u_{p_1}) + \mathcal{L}(3 u_{p_2})$$

$$= 12 \mathcal{L}(u_{p_1}) + 3 \mathcal{L}(u_{p_2}) = 12(t-1) + 3t^2 e^t$$

<u>Lineare</u> Dgl!

$$\boxed{u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.}$$

Dgl:

$u''' + u'' = 3\sin(5t)$

$$h(t) = 3\sin(5t)$$

Ansatz

$u_p(t) = a\cos(5t) + b\sin(5t)$

$u_p'(t) = -5a\sin(5t) + 5b\cos(5t)$

$u_p''(t) = -25a\cos(5t) - 25b\sin(5t)$

$u_p'''(t) = 125a\sin(5t) - 125b\cos(5t)$

$u_p''' + u_p'' = (125a - 25b)\sin(5t) + (-125b - 25a)\cos(5t)$

$\overset{!}{\underset{\text{Dgl}}{=}} 3\sin(5t) + 0\cos(5t)$

$125a - 25b \overset{!}{=} 3 \longrightarrow 125a + 5a = 3$

$-25a - 125b \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow b = -\frac{1}{5}a$

$\Longrightarrow a = \frac{3}{130}$

$\Longrightarrow b = -\frac{1}{5}a = -\frac{3}{650}$

$$\boxed{u_p(t) = \frac{3}{130}\cos(5t) + \frac{3}{650}\sin(5t)}$$

$$\boxed{u(t) = u_h(t) + u_p(t)}$$

Beispiel F: Gesucht allgemeine Lösung der **inhomogenen** Dgl.

$$1\,u''' + 1u'' + 4u' + 4u = h_k(t)\,, \qquad k = 1, 2, 3.$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \iff \lambda^2(\lambda+1) + 4(\lambda+1) = (\lambda^2+4)\underbrace{(\lambda+1)}_{\lambda_1 = -1} = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda_{2,3} = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2i \qquad \lambda_3 = -2i$$

$$u^{[1]}(t) = e^{-1\cdot t} \qquad z^{[2]}(t) = e^{2it} \qquad z^{[3]}(t) = e^{-2it}$$

$$e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$$

$$\mathrm{Re}\,(e^{2it}) = \cos(2t) \qquad \mathrm{Im}\,(e^{2it}) = \sin(2t)$$

$$u^{[1]}(t) = e^{-t} \qquad u^{[2]}(t) = \cos(2t) \qquad u^{[3]}(t) = \sin(2t)$$

$$\boxed{u_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t)}$$

$u_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t)$

Dgl $u''' + u'' + 4u' + 4u = 5e^{-2t}$

$h_1(t) = 5e^{-2t}$ = Polynom 0-ten Grades $\cdot e^{-2t}$ $\quad P(-2) \neq 0$

Ansatz: Polynom 0-ten Grades $\cdot e^{-2t}$

Ansatz $\underline{\underline{u_p(t) = ke^{-2t}}}$ ⊛ (k entspricht b_0 aus der Tabelle)

einsetzen in Dgl: (HA2,3a)

$u_p'(t) = (-2)\, ke^{-2t}$

$u_p''(t) = (-2)^2\, ke^{-2t}$

$u_p'''(t) = (-2)^3\, ke^{-2t}$

Dgl: $u''' + u'' + 4u' + 4u = 5e^{-2t}$

u_p einsetzen $\quad (-2)^3 ke^{-2t} + (-2)^2 ke^{-2t} + 4\cdot(-2)^1 ke^{-2t} + 4ke^{-2t} \overset{!}{=} 5e^{-2t}$

$\Longleftrightarrow k\big(\underbrace{(-2)^3 + (-2)^2 + 4(-2) + 4}_{P(-2)}\big)e^{-2t} \overset{!}{=} 5e^{-2t}$

genau dann lösbar wenn $P(-2) \neq 0$

$\Longleftrightarrow k(-8+4-8+4) \overset{!}{=} 5 \Longleftrightarrow k = -\frac{5}{8}$ ⊛ $\Longrightarrow \boxed{u_p = -\frac{5}{8}e^{-2t}}$

$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t) - \frac{5}{8}e^{-2t}$

$$\boxed{u_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t)}$$

Dgl $u''' + u'' + 4u' + 4u = 3\cos(4t)$

$h_2(t) = 3\cos(4t)$

$\pm 4i$ keine Nullstellen von $P(\lambda)$
$\cos(4t)$ keine Lösung der homogenen Dgl $\Longrightarrow$

Ansatz: $u_p(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t)$

einsetzen in Dgl: $u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p = 3\cos(4t)$

$u_p'(t) = -4a\sin(4t) + 4b\cos(4t)$

$u_p''(t) = -16a\cos(4t) - 16b\sin(4t)$

$u_p'''(t) = 64a\sin(4t) - 64b\cos(4t)$

Einsetzen in Dgl $u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p = 3\cos(4t)$

$$(\underbrace{-64b - 16a + 4\cdot 4b + 4a}_{3})\cos(4t) + (\underbrace{64a - 16b - 4\cdot 4a + 4b}_{0})\sin(4t) \stackrel{!}{=} 3\cdot\cos(4t) + 0\cdot\sin(4t)$$

$-12a - 48b = 3$
$48a - 12b = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}b$

$-3b - 48b = 3 \Longrightarrow b = -\frac{3}{51}$

$a = \frac{1}{4}\cdot -\frac{3}{51} = -\frac{3}{204}$

$u_p(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t) = -\frac{3}{204}\cos(4t) - \frac{3}{51}\sin(4t)$

$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1e^{-t} + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t) - \frac{3}{204}\cos(4t) - \frac{3}{51}\sin(4t)$

$u_h''' + u_h'' + 4u_h' + 4u_h = 0$

$$u_h(t) = c_1 e^{-t} \qquad + c_2\cos(2t) \qquad\qquad + c_3\sin(2t)$$

$u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p \overset{!}{=} 10\cos(2t)$

$$h_3(t) = 10\cos(2t)$$

Der Ansatz ohne t führt beim Einsetzen in die Dgl zu
$0 \overset{!}{=} 10\cos(2t)$
da $\cos(2t)$ und $\sin(2t)$ die homogene Dgl lösen.
$P(\pm 2i) = 0$

Ansatz: $u_p(t) = (a\cos(2t) + b\sin(2t))\,t$

einsetzen in Dgl: $u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p = 10\cos(2t)$

$$u_p'(t) = (2bt + a)\cos(2t) + (b - 2ta)\sin(2t)$$

$$u_p''(t) = (4b - 4at)\cos(2t) + (-4a - 4tb)\sin(2t)$$

$$u_p'''(t) = (-8bt - 12a)\cos(2t) + (-12b + 8ta)\sin(2t)$$

$$\xrightarrow{\text{Dgl}} (\cancel{-8bt} - 12a + 4b \cancel{- 4at} + \cancel{8bt} + 4a + \cancel{4at})\cos(2t)$$

$$+ (-12b + \cancel{8ta} - 4a \cancel{- 4tb} + 4b \cancel{- 8ta} + \cancel{4bt})\sin(2t) \overset{!}{=} 10\cos(2t) + 0\cdot\sin(2t)$$

$-8a + 4b = 10$

$-4a - 8b = 0 \longrightarrow b = -\frac{1}{2}a$

$-8a + 4(-\frac{1}{2}a) = -10a \overset{!}{=} 10$

$\Longrightarrow a = -1$

$\longrightarrow b = 1/2$

$u_p(t) = \frac{t}{2}\sin(2t) - \cos(2t)$

$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

Resonanzfall! Vgl. HA 2

Ist die Lösung für $t \geq 0$ beschränkt?

$$\max |u(t)| = ?$$

Lösung "wächst" mit t

$$|u(t)| = \Big|\underbrace{c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t)}_{u_h(t)} + \underbrace{\tfrac{t}{2}\sin(2t) - t\cos(2t)}_{u_p(t)}\Big|$$

zum Beispiel für $t = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

$$|u(k\pi)| = \Big|c_1 e^{-k\pi} + c_2 \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} + c_3 \underbrace{\sin(2k\pi)}_{0} + \underbrace{\tfrac{k\pi}{2}\sin(2k\pi)}_{0} - k\pi \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1}\Big|$$

$$= \underbrace{\Big|\underbrace{c_1 e^{-k\pi} + c_2}_{\text{beschränkt durch } |c_1 + c_2|} - \underbrace{k\pi}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} \infty}\Big|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} \infty}$$

$|e^{-k\pi}| \leq 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

Lösung ist nicht beschränkt für alle $t \longrightarrow \infty$