Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2023/2024
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 5 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gesucht $u : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\mathcal{L}[u] = u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ gegebene reelle Zahlen sind.

V: Die Lösungsmenge bildet einen linearen Raum der Dimension n.

Mit einer Basis $u^{[1]}(t)$, $u^{[2]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)$ lässt sich jede Lösung schreiben als

$$\boxed{u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u^{[k]}(t) = c_1 u^{[1]}(t) + c_2 u^{[2]}(t) + \ldots + c_n u^{[n]}(t)}$$

wobei $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten sind.

Beispiel A:

$$\mathcal{L}[u] = u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) \ = 0$$

Für $u(t) = e^{\lambda t} \implies u'(t) =$ $\qquad\qquad\qquad u''(t) =$

$\mathcal{L}[u] =$

$u(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung von $u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0 \iff$

Beobachtung: Für

$$\mathcal{L}[u] = u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 u'(t) + a_0 u(t)$$

gilt, wegen $\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t}$ ist genau dann eine Lösung der Dgl $\mathcal{L}[u] = 0$ wenn λ Nullstelle des zugehörigen

Charakteristischen Polynoms

$$\boxed{P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0}$$

ist. Das Polynom hat unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n (komplexe) Nullstellen.

Ist λ_k eine Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist $e^{\lambda_k t}$ Lösung der Dgl.

Ist λ_k doppelte Nullstelle von $P(\lambda)$, so sind $e^{\lambda_k t}$, $t^1 e^{\lambda_k t}$ Lösungen der Dgl.

Ist λ_k dreifache Nullstelle von $P(\lambda)$, so sind $e^{\lambda_k t}$, $t^1 e^{\lambda_k t}$, $t^2 e^{\lambda_k t}$ Lösungen

und so weiter... (vgl. S.40 Vorlesung)

Mit allen Nullstellen erhält man so eine Basis des Lösungsraums/ein

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)$.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$u(t) = c_1 u^{[1]}(t) + \cdots + c_n u^{[n]}(t), \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \text{ bzw. } \mathbb{R}$$

.

Beispiele:

A) $u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0, \qquad u(0) = 3,\ u'(0) = 1$

Dimension des Lösungsraums =

Charakteristisches Polynom:

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$\lambda_1 = \qquad , \ \lambda_2 = \qquad .$

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t) = \qquad \qquad u^{[2]}(t) =$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$u(t) = c_1 e^{\cdots} + c_2 e^{\cdots} .$

Anfangswerte:

Lösung der Anfangswertaufgabe

B) $u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 0, \qquad u(0) = 3,\ u'(0) = 1$

Dimension des Lösungsraums $=$

Charakteristisches Polynom:

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_1 = \qquad , \lambda_2 = \qquad .$$

Fundamentalsystem: $u^{[1]}(t) =$ $\qquad$ $u^{[2]}(t) =$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$u(t) = c_1 e^{\cdots} + c_2 e^{\cdots}$$

Anfangswerte:

Lösung der Anfangswertaufgabe

C) $u''(t) + 4u(t) = 0$

Charakteristisches Polynom:

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_1 = \qquad , \lambda_2 = \qquad .$$

Fundamentalsystem: $z^{[1]}(t) =$ $\qquad$ $z^{[2]}(t) =$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$u(t) = \hat{c}_1 e^{\cdots} + \hat{c}_2 e^{\cdots}$$

Reelle Darstellung der Lösung = ?

Komplexe Nullstellen von P tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf!

$$P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \overline{P(\lambda)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\lambda^n} + \overline{a_{n-1}\lambda^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\lambda} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\lambda}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\lambda} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow P(\overline{\lambda}) = 0$$

Wenn $z^{[1]}(t) = e^{(a+ib)t}$ Lösung, dann auch $z^{[2]}(t) = e^{(a-ib)t}$

$$z^{[1]}(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\sin(bt)$$

$$z^{[2]}(t) = e^{(a-ib)t} = e^{at}e^{-ibt} = e^{at}(\cos(-bt) + i\sin(-bt))$$
$$= e^{at}\cos(bt) - ie^{at}\sin(bt)$$

Linearkombinationen von Lösungen sind Lösungen. Wähle

$$u^{[1]}(t) := \frac{z^{[1]}(t) + z^{[2]}(t)}{2} =$$

$$u^{[2]}(t) := \frac{z^{[1]}(t) - z^{[2]}(t)}{2i} =$$

Im Beispiel C) statt $z^{[1]}(t) = e^{2it}$, $z^{[2]}(t) = e^{-2it}$

$$u^{[1]}(t) := \mathsf{Re}\,(z^{[1]}(t)) = \mathsf{Re}\,(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \cos(2t),$$

$$u^{[2]}(t) := \mathsf{Im}\,(z^{[1]}(t)) = \mathsf{Im}\,(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \sin(2t)$$

Allgemeine (reelle) Lösung: $u(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Beispiel D: Gesucht sei reelle Darstellung der Lösung der Randwertaufgabe

$$u''' + 2u'' + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) u' = 0$$

$$u(0) = 0, \;\; u'(0) = 1, \;\; u(1) = 1.$$

Lösung:
Schritt 1: Nullstellen des charakteristischen Ploynoms

$P(\lambda) =$

Schritt 2: Komplexes Fundamentalsystem:

$$u^{[1]}(t) = e^{0\cdot t}$$

$$z^{[2]}(t) = e^{(-1+i\frac{\pi}{2})t} =$$

$$z^{[3]}(t) = e^{(-1-i\frac{\pi}{2})t}$$

Schritt 3: Reelles Fundamentalsystem:

$$u^{[1]}(t) = 1$$

$$u^{[2]}(t) = e^{-t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$u^{[3]}(t) = e^{-t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Schritt 4: Allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3 e^{-t}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right).$$

Schritt 5: Anfangs-/Randwerte: $u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ u(1) = 1.$

$$u(t) = c_1 + e^{-t}\left(c_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

$$u'(t) = e^{-t}\left(-c_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - c_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - \tfrac{\pi}{2}c_2 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \tfrac{\pi}{2}c_3 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

$$u'(t) = e^{-t}\left(\left(-c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \left(-c_3 - \tfrac{\pi}{2}c_2\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

$$u(0) = c_1 + e^{-0}\left(c_2 \cos(0) + c_3 \sin(0)\right)$$

$$u(1) = c_1 + e^{-1}\left(c_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + c_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$u'(0) = -c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3 = c_1 + \tfrac{\pi}{2}(1 - c_1)e^1 \overset{!}{=} 1 \iff c_1 = 1$$

$$u(t) = c_1 \cdot e^0 + e^{-t}\left(c_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right) = 1 - e^{-t}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right).$$

Für H2: $\max_{t\geq 0} |u(t)|$

Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gesucht $u : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{L}[u] = u^{(n)} + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t)\,.$$

$$\begin{aligned}\text{Allgemeine Lösung} \;&= \text{Allgemeine Lösung der homogenen Dgl}\\ &+ \text{partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl}\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung im allg. über Variation der Konstanten.
Bei speziellen Inhomogenitäten b oft einfacher: spezielle Ansätze.

Inhomogenität $b(t)$ (gegeben)	Ansatz für Lösung u_p
$(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_m t^m)e^{\alpha t}$ $P(\alpha) \neq 0$ $\alpha \quad k-$fache Nullstelle von $P(\lambda)$	$u_p(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m)e^{\alpha t}$ $u_p(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m)t^k e^{\alpha t}$
$\beta\cos(\alpha t)$ oder $\beta\sin(\alpha t)$ $\pm i\alpha$ keine Nullst. von $P(\lambda)$ $\pm i\alpha$ einfache Nst. von $P(\lambda)$	 $u_p(t) := b\sin(\alpha t) + a\cos(\alpha t)$ $u_p(t) := t \cdot (b\sin(\alpha t) + a\cos(\alpha t))$

Beispiel E: Gesucht allgemeine Lösung der **inhomogenen** Dgl.

$$u''' + u'' = 2\,.$$

u_h : $\quad P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

$u^{[1]}(t) = e^{0t} = 1, \quad u^{[2]}(t) = te^{0t} = t, \quad u^{[3]}(t) = e^{-t}$

$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$.

u_p : Inhomogenität $b(t) = 2 \cdot e^{0t}$

Ansatz für $u_p = a \cdot e^0 \cdot t^2$

Einsetzen in die Dgl:

Also $u_p =$

Allgemeine Lösung: $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + t^2$.

Ansätze bei anderen Inhomogenitäten: für

$$u''' + u'' = h(t) \text{ mit } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1.$$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$h_1(t) = t - 1$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$h_2(t) = t^2 e^t$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$h_3(t) = \ 12(t-1) + 3t^2 e^t$

$$u_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$$

$h(t) = 3\sin(5t)$

__**Beispiel F:**__ Gesucht allgemeine Lösung der **inhomogenen** Dgl.

$$u''' + u'' + 4u' + 4u = \; h_k(t)\,, \qquad k = 1, 2, 3.$$

$P(\lambda) =$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \qquad \lambda_2 = \qquad \lambda_3 =$

$u^{[1]}(t) = \qquad z^{[2]}(t) = \qquad z^{[3]}(t) =$

$u^{[1]}(t) = \qquad u^{[2]}(t) = \qquad u^{[3]}(t) =$

$u_h(t) = c_1 \qquad + c_2 \qquad + c_3$

$u_h(t) = c_1 \qquad + c_2 \qquad\qquad + c_3$

$h_1(t) = 5e^{-2t}$

Ansatz $u_p(t) = ke^{-2t}$

einsetzen in Dgl: (HA2,3a)

$$u_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t)$$

$$h_2(t) = 3\cos(4t)$$

Ansatz: $u_p(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t)$

einsetzen in Dgl: $u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p = 3\cos(4t)$

$$u_p'(t) = -4a\sin(4t) + 4b\cos(4t)$$

$$u_p''(t) = -16a\cos(4t) - 16b\sin(4t)$$

$$u_p'''(t) = 64a\sin(4t) - 64b\cos(4t)$$

$$u_h(t) = c_1 e^{-t} \qquad + c_2 \cos(2t) \qquad\qquad + c_3 \sin(2t)$$

$$h_3(t) = 10\cos(2t)$$

Ansatz: $u_p(t) = (a\cos(2t) + b\sin(2t))\,t$

einsetzen in Dgl: $u_p''' + u_p'' + 4u_p' + 4u_p = 10\cos(2t)$

$$u_p'(t) = (2bt + a)\cos(2t) + (b - 2ta)\sin(2t)$$

$$u_p''(t) = (4b - 4at)\cos(2t) + (-4a - 4tb)\sin(2t)$$

$$u_p'''(t) = (-8bt - 12a)\cos(2t) + (-12b + 8ta)\sin(2t)$$

Resonanzfall! Vgl. HA 2

$\max|u(t)| =$?

$$|u(t)| = \left|c_1 e^{-t} + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t) + \tfrac{t}{2}\sin(2t) - t\cos(2t)\right|$$

$$|u(k\pi)| = \left|c_1 e^{-k\pi} + c_2\cos(2k\pi) + c_3\sin(2k\pi) + \tfrac{k\pi}{2}\sin(2k\pi) - k\pi\cos(2k\pi)\right|$$