Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 4 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Bernoullische DGL: $\boxed{u'(t) = a(t)u^{1}(t) + b(t)(u(t))^{\alpha}}$

$\alpha \neq 0, 1$

Substitution : $\boxed{y(t) := (u(t))^{1-\alpha}}$ liefert

$$y'(t) = (1-\alpha)(u(t))^{1-\alpha-1}u'(t) \overset{\cdot \frac{u^{\alpha}}{1-\alpha}}{\iff} u' = \frac{u^{\alpha}\cdot y'}{1-\alpha}$$

Alternativ

$y' = (1-\alpha)u^{-\alpha}\cdot u'$

$\overset{\text{Dgl}}{=} (1-\alpha)u^{-\alpha}\left[au + bu^{\alpha}\right]$

$= (1-\alpha)\left[au^{1-\alpha} + bu^{0}\right]$

Dies eingesetzt in die DGL ergibt

$$u' = \frac{u^{\alpha}\cdot y'}{1-\alpha} = au + bu^{\alpha}$$

vorausgesetzt $u \neq 0$: multipliziere $\dfrac{1-\alpha}{u^{\alpha}}$

$$y' = (1-\alpha)a\underbrace{u^{1-\alpha}}_{y} + (1-\alpha)b\underbrace{u^{0}}_{1} \iff$$

$$\boxed{y'(t) = (1-\alpha)(a(t)\cdot y(t) + b(t))}$$

Lineare Dgl für y

Beispiel:

$$u^1 + \frac{e^t}{u^2} + 3tu' = 0, \qquad u(2) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{für } t \geq 2.$$

Sortieren: $3tu' = -u - \frac{e^t}{u^2} \Longrightarrow$ $u' = \underbrace{-\frac{1}{3t}}_{a} u^1 - \underbrace{\frac{e^t}{3t}}_{b} u^{-2}$ α

Bernoullische DGL $\quad u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^{\alpha}$

Hier: $\alpha = -2$, $a(t) = -\frac{1}{3t}$, $b(t) = -\frac{e^t}{3t}$

Substitution: $y := u^{1-\alpha} = u^{1-(-2)}$ liefert die neue Dgl. :

$$y' = (1-\alpha)(a \cdot y + b)$$

Hier: $\quad y' = (\underbrace{1-(-2)}_{3})\left(-\frac{1}{3t} y + \frac{-e^t}{3t}\right)$

$y' = -\frac{1}{t} y - \frac{e^t}{t}$ linear

Lösung nach Formel aus Seite 11 Vorlesung

$y' = \underbrace{-\frac{1}{t}}_{\hat{a}} y \underbrace{- \frac{e^t}{t}}_{\hat{b}}$

$A'(t) = \hat{a}(t) = -\frac{1}{t}$ $\qquad \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln(t) + \hat{C}$

zum Beispiel $\boxed{A(t) = -\ln(t)}$

Mit $\hat{b}(t) = \frac{-e^t}{t}$ rechnen wir

$$(B^*(t))' = \underline{e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t)} = \underbrace{e^{\ln(t)}}_{t} \cdot \frac{-e^t}{t} = t \cdot \frac{-e^t}{t} = -e^t$$

$$B^*(t) = \int -e^t\,dt = -e^t + \tilde{c}$$

z.B. Die Wahl $\boxed{B^*(t) = -e^t}$ liefert

$$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) = e^{-\ln(t)}(-e^t + c) = \frac{1}{e^{\ln(t)}}(c - e^t) = \boxed{\frac{1}{t}(c - e^{t}) = y(t)}$$ (*)

Rücksubstitution: $y = u^3 \implies u(t) = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{\frac{1}{t}(c - e^t)}$ $\qquad$ c bestimmen mit Anfangswert

$u(2) \overset{!}{=} \sqrt[3]{\frac{-e^2}{2}} \overset{!}{=} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(c - e^2)} \implies c = 0$

(*) : $y(t) = \frac{1}{2}(-e^{t}$

Lösung mittels Variation der Konstanten

$y' = -\frac{1}{t} y \underbrace{- \frac{e^{-t}}{t}}_{\text{Inhomogenität}}$

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. $y_h' = -\frac{1}{t} y_h$

nach Tabelle $y_h(t) = e^{\int \hat{a}(t)dt} = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = e^{-\ln(t) + \hat{c}} = e^{-\ln(t)} \cdot e^{\hat{c}} = \frac{1}{e^{\ln(t)}} \cdot C$

$\boxed{y_h(t) = c \cdot \frac{1}{t}} = c \cdot y_H$

Lösung der inhomogenen Dgl.: Ansatz $y_p = c(t) y_H = c(t) \cdot \frac{1}{t}$ $(*)$

Exkurs: nochmals erklärt

$y' = ay + b$ $\quad y_H' = a y_H$

$y_p = c(t)\, y_H \xrightarrow{\text{Dgl}}$

$c'(t)\, y_H + \cancel{c(t)\, y_H'} = \cancel{a \cdot c(t)\, y_H} + b$

$\Leftrightarrow \quad c'(t)\, y_H = b$

Einsetzen in DGL. $y' = -\frac{1}{t} \cdot y - \frac{e^t}{t}$ liefert

$c'(t) y_H(t) \overset{!}{=}$ Inhomogenität $\iff c'(t) \cdot \frac{1}{t} \overset{!}{=} -\frac{e^t}{t}$

$c'(t) = -e^t \quad \Longleftarrow \quad c(t) = -e^t \quad \Longleftarrow \quad (*) \quad \boxed{y_p(t) = -e^t \cdot \frac{1}{t}}$

Allg. Lösung der inhomogenen Dgl. $y = y_p + y_h = -e^t \cdot \frac{1}{t} + c \cdot \frac{1}{t}$

Rücksubstitution $u = y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{c - e^t}{t}}$ $\quad$ c über $u(2) = \sqrt[3]{\frac{-e^2}{2}}$

$\rightarrow c = 0$

$u(t) = \sqrt[3]{\frac{-e^t}{t}}$

Riccatische Differentialgleichungen

Gegeben sei eine partikuläre Lösung u_p der Differentialgleichung

$$\boxed{u'(t) = a(t)u^{1}(t) + b(t)(u(t))^2 + c(t)\,.}$$

Sei u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung. Dann löst $w = u - u_p$ die Bernoullische Differentialgleichung:

$$w' = [a(t) + 2b(t)u_p(t)]w + b(t)w^2.$$

mit $\alpha = 2 \implies$ Standardsubstitution: $\boxed{y := w^{1-2} = \frac{1}{u - u_p}}$

Neue DGL: $\boxed{y' = \underbrace{-(a + 2b \cdot u_p)\,y^{1}}_{\hat{a}\cdot y} \underbrace{-\, b}_{+\,\hat{b}}\,.}$ Lineare Dgl für y

Beispiel:

$$u' = -u^2 + \frac{2}{t^2}.$$

$u' = \underbrace{0}_{a} \cdot u^1 \underbrace{- 1}_{b} \cdot u^2 + \frac{2}{t^2}$

Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit

$$a = 0, \; \underline{\underline{b = -1}}, c(t) = \tfrac{2}{t^2}.$$

Wegen $\left(\dfrac{1}{t}\right)' = -\dfrac{1}{t^2}$ liegt der Ansatz $u_p = \dfrac{k}{t}$ nahe.

$k = ?$

Einsetzen in die DGL für u liefert

$$\overset{u_p'}{-\frac{k}{t^2}} = \overset{u_p^2}{-\frac{k^2}{t^2}} + \frac{2}{t^2} \quad \overset{\cdot t^2}{\Longleftrightarrow} \quad k^2 - k - 2 = 0$$

p,q-Formel

$k = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2 + 1/4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\sim k = -k^2 + 2$

mit den Lösungen $k_1 = -1$ und $k_2 = 2$.

$u_p(t) = \frac{-1}{t}$ und $\tilde{u}_p(t) = \frac{2}{t}$ lösen beide die Dgl

Wir setzen (wählen) $u_p = -\frac{1}{t}$ und $\boxed{y := \dfrac{1}{u - u_p} = \dfrac{1}{u + \frac{1}{t}}.}$

Die Differentialgleichung für y lautet

$$y' = -[\overset{0}{a} + 2b\overset{-1\cdot\frac{-1}{t}}{u_p}]y - \overset{-1}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -\frac{2}{t}y + 1$$

linearc Dgl für y

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl $y_h' = -\frac{2}{t}y_h$:

$$y_h(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} \Longrightarrow y_h = e^{-2\ln(t) + \tilde{c}} = \frac{1}{e^{2\ln(t)}} \cdot e^{\tilde{c}} = c\,\frac{1}{(e^{\ln(t)})^2} = \boxed{c \cdot \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{y_H} = y_h}$$

Lösung der inhomogenen Dgl hier mit Variation der Konstanten!

Ansatz $y_p(t) = c(t) \cdot y_H(t) = \frac{c(t)}{t^2}$

$$\boxed{c(t)t^{-2} = y_p} \qquad \text{Einsetzen in DGL: } y' = -\frac{2}{t}y + 1$$

$$c'(t)\frac{1}{t^2} \stackrel{!}{=} 1$$

(Inhomogenität von Dgl $y' = -\frac{2}{t}y + 1$)

$$c'(t) = t^2 \quad \Longleftarrow \quad c(t) = \frac{t^3}{3}$$

$$\boxed{y_p(t) = c(t) \cdot \frac{1}{t^2}} = \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t^2} = \boxed{\frac{t}{3}}$$

$$y = y_p + y_h = y_p + cy_H =$$

$$= \frac{t}{3} + c \cdot \frac{1}{t^2}$$

Alternativ: Formel aus Vorlesung 2 mit $y' = \overbrace{-\frac{2}{t}}^{\hat{a}} y + \overbrace{1}^{\hat{b}}$

$$\hat{a}(t) = -[a + 2bu_p] = -\frac{2}{t} \qquad \hat{b}(t) = -b(t) = 1$$

$$A'(t) = \hat{a}(t) \qquad \int -\frac{2}{t}\,dt = -2\ln(t) + \hat{C}$$

z.B.

$$\boxed{A(t) = -2\ln(t)}$$

$$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t) = e^{2\ln(t)} \cdot 1 = e^{\ln(t)\cdot 2}$$

$$= \left(e^{\ln(t)}\right)^2 = t^2 \qquad \text{z.B. } \boxed{B^* = \frac{t^3}{3}}$$

$$y(t) = e^{A(t)}\,(B^*(t) + C)$$

$$= e^{-2\ln(t)}\left(\frac{t^3}{3} + c\right) = \frac{1}{\underbrace{e^{\ln(t)\cdot 2}}_{t}}\left(\frac{t^3}{3} + c\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3}{3} + c\right)$$

$$= \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2} = \boxed{\frac{t^3 + 3c}{3t^2} = y(t)}$$

Rücksubstitution:

Wir hatten $y := \dfrac{1}{u - u_p} = \dfrac{1}{u + \frac{1}{t}}$

$\frac{1}{y} = u + \frac{1}{t}$

$$u = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2}{t^3 + 3c} - \frac{1}{t} = \frac{2t^3 - 3c}{t^4 + 3ct}.$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{f(u)-u}{t}$$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dt}{t}$$

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) = f(u)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u)-u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$u' = (a + bf(u)) \cdot 1$ separierbar
Lineare DGL homogen	$y_h'(t) = a(t)y_h(t)$	$y_h = e^{\int a(t)dt}$ $y_h = e^{A(t)+k} = cy_H$	separierbar
Lineare DGL inhomogen	$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ Alternativ:	$y_P = c(t) \cdot y_H$ $c'(t) \cdot y_H \overset{!}{=} b$ $y = c \cdot y_H + y_P$ $y(t) = e^{A(t)} (B^*(t) + C)$ $A'(t) = a(t), (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$	$\longleftarrow$ Ansatz
Bernoullische DGL	$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^{\alpha}$	$y := u^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0, 1$	$\dot{y} = (1-\alpha)(a \cdot y + b)$ linear
Riccatische DGL	$u'(t) = a(t)u + b(t)u^2 + c(t)$ b, c nicht ident. 0	$y := \frac{1}{u-u_P}$	$\dot{y} = -[a + 2b \cdot u_P] \cdot y - b$ linear

Wichtig: Typ erkennen.

Typ	DGL	Substitution	ggf. neue Diff.gleichung
Ähnlichkeits-dgl	$t^2y' = y^2 + t^2 e^{\frac{t}{y}}$ $y' = \frac{y^2}{t^2} + e^{\frac{t}{y}} = u^2 + e^{\frac{1}{u}} = f(u)$	$u = \frac{y}{t}$	$u' = \frac{f(u)-u}{t} = \frac{u^2 + e^{1/u} - u}{t}$ separierbar
Riccati	$u' - \underbrace{\frac{1}{\tan(t)}}_{-a} u + \underbrace{1}_{-b} u^2 = \sin^2(t)$	$u_p = \sin(t)$ $y(t) := \frac{1}{u - \sin(t)}$	$y' = -[a + 2b\,u_p]y - b$ $= -\left[\frac{1}{\tan(t)} + 2(-1)\sin(t)\right]\cdot y + 1$ Linear
//	$u' - \underbrace{\frac{2}{t}}_{-a} u + \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{-b} u^2 = 4t^2$	$y = \frac{1}{u - u_p}$ $u_p = 2t^2$	$y' = -[a + 2b\,u_p]y - b$ $= -\left[\frac{2}{t} + 2\left(-\frac{1}{t^2}\right)2t^2\right]\cdot y + \frac{1}{t^2}$ linear
Bernoulli	$4u' + \frac{4}{t}u + u^3 = 0$ $u' + 1/t\, u + \frac{1}{4}u^3 = 0$ $u' = -1/t\, u - \frac{1}{4}u^3$	$y = u^{1-\alpha}$ $\alpha = 3$ $y = u^{-2}$ $a = -\frac{1}{t}$ $b = -1/4$	$y' = (1-\alpha)(ay + b)$ $= -2\left(-\frac{1}{t}y - \frac{1}{4}\right)$ linear
Ähnlichkeits-dgl.	$y' = \cos(\underbrace{2t - 3y}_{u})$ $= f(u) = \cos(u)$ $a = 2$ $b = -3$	$u = 2t - 3y$	$u' = a + b\cdot f(u) = (2 - 3\cos(u))\cdot 1$ separierbar (*)
Linear	$\dot{u} + \sin(t)\,u = \cos(t)$	—	—

(*) $\frac{du}{2 - 3\cos(u)} = 1\,dt$

Exakte Differentialgleichungen

$$\boxed{g(t,u) + h(t,u)\,u'(t) = 0 \quad \text{mit} \quad g_u(t,u) = h_t(t,u)}$$

Ziel: finde (Potential) $\Psi(t,u)$ mit $\Psi_{tu} = g_u$ $\Psi_{ut} = h_t$

$$\boxed{\Psi_t(t,u) = g(t,u) \text{ und } \Psi_u(t,u) = h(t,u)}$$

Dann gilt für jede Lösung $u(t)$ der DGL

$$\frac{d}{dt}\Psi(t,u(t)) = \Psi_t(t,u) + \Psi_u(t,u)\,u'(t) = g(t,u) + h(t,u)\,u'(t) = 0$$

Durch $\boxed{\Psi(t,u) = K}$ sind Lösungen der DGL gegeben.

Bsp. für LUM: $\Psi(t,u) = tu + e^{2t}u^3$

$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,u) = \Psi_t(t,u) = u + u^3 \cdot 2e^{2t}$

$\frac{\partial}{\partial u}\psi(t,u) = \Psi_u(t,u) = t + e^{2t} \cdot 3u^2$

Berechnung von $\frac{d}{dt}\Psi(t,u(t))$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = (\Psi \circ \phi)(t) = \Psi(t,u(t))$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad C^2 - \text{Funktion}$$

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \phi,\ \Psi \quad C^2 - \text{Funktionen}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}, \qquad \Psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \Psi(x_1,x_2) \in \mathbb{R}\,.$$

$$J\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}, \qquad J\Psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{x_1} & \Psi_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$Jf(t) = J(\Psi \circ \phi) = \begin{pmatrix} \Psi_t & \Psi_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \Psi_t + \Psi_u \cdot \dot{u}$$

Vorgehen:

Schritt 1: Prüfe die Integrabilitätsbedingung : $g_u = h_t$

Schritt 2: Falls erfüllt: Dgl ist exakt. Bestimme Potential Ψ
Falls nicht: Dgl ist nicht exakt.

Schritt 3: Setze $\Psi(t, u) = K$. Falls möglich, löse nach u auf.

Beispiel a) $\underbrace{u(t)^2 - \frac{2}{t^2}}_{g(t,u)} + \underbrace{1\,u'(t)}_{h(t,u)} \;=\; 0.$

$g(t,u) = u^2 - \frac{2}{t^2}$

$g_u = 2u \neq 0 = h_t \Longrightarrow$ nicht exakt.

DGL ist Riccatisch. Siehe Beispiel oben.

Beispiel b) $\underbrace{e^t \cdot u}_{g(t,u)} + \underbrace{(1+e^t)}_{h(t,u)} \cdot \dot{u}(t) = 0.$

$g_u = e^t$

$h_t = (1+e^t)_t = e^t$

$g_u = e^t = h_t \implies$ exakt. ✓

DGL ist aber auch linear!

Exkurs: Lösung als separierbare

$\dot{u}(t) = \frac{-e^t}{1+e^t} u = \frac{du}{dt}$

$\int \frac{1}{u} \, du = -\int \frac{e^t}{1+e^t} \, dt = -\ln(1+e^t) + \hat{c}$

$\ln(|u|) = -\ln(1+e^t) + \hat{c} \xrightarrow{\exp}$

$|u| = e^{-\ln(1+e^t)+\hat{c}} = \frac{e^{\hat{c}}}{1+e^t}$

$u(t) = \frac{k}{1+e^t}$

Mit Formel für lineare, homogen

$u(t) = \exp\left(\int \frac{-e^t}{1+e^t} \, dt\right)$

$= e^{-\ln(1+e^t)+\hat{c}} = \frac{1}{1+e^t} \cdot e^{\hat{c}}$

Lösung von b) als exakte DGL:

$\underbrace{e^t \cdot u}_{g} + \underbrace{(1+e^t)}_{h} \cdot \dot{u}(t) = 0$

Suche Ψ mit $\Psi_t = g$ und $\Psi_u = h$

$\Psi_t(t,u) = g(t,u) = e^t \cdot u \overset{\int \dots dt}{\implies} \Psi(t,u) = u \cdot e^t + c(u)$ (*)

$\partial/\partial u$

$\Psi_u(t,u) = h(t,u) = 1 + e^t \overset{!}{=} e^t + \boxed{c_u(u)}$

$c'(u) = c_u(u) = 1$

$c(u) = u + \hat{k}$

Zum Bsp:

$$c(u) = u \qquad \Psi(t,u) \overset{*}{=} ue^t + c(u) = u \cdot e^t + u$$

Zu lösen ist also:

$$\Psi(t,u) = e^t \cdot u + u \overset{!}{=} K$$

$$u(1+e^t) = k \qquad u(t) = \frac{k}{1+e^t}$$

Beispiel c) $\underbrace{(5\,t^2 + 7\,u^2)}_{g(t,u)} + \underbrace{(14\,t\,u + \cos u)}_{h(t,u)}\,u' = 0.$.

Integrabilitätsbedingung: $g_u = h_t$

$(5\,t^2 + 7\,u^2)_u = 0 + 14u \overset{\checkmark}{=} (14\,t\,u + \cos u)_t = 14u + 0$

$\Rightarrow$ Dgl ist exakt

Potentialberechnung:

$g = \Psi_t = 5t^2 + 7u^2 \overset{\int dt}{\Longleftrightarrow} \Psi(t,u) = 5\frac{t^3}{3} + 7u^2 t + c(u) \quad (*)$

$\partial/\partial u$

$h \overset{!}{=} \Psi_u \overset{!}{=} 14\,t\,u + \cos(u) \overset{!}{=} 0 + 14ut + c'(u) \longrightarrow c'(u) = \cos(u)$

z.B. $c(u) = \sin(u)$ $\quad (*): \quad \Psi(t,u) = 5\frac{t^3}{3} + 7u^2 t + \sin(u) \quad (+\tilde{k})$

Zu lösen ist also:

$$\Psi(t,u) = \frac{5}{3}t^3 + 7u^2t + \sin(u) \overset{!}{=} K$$

implizite Darstellung von u

Explizites Auflösen nicht möglich.

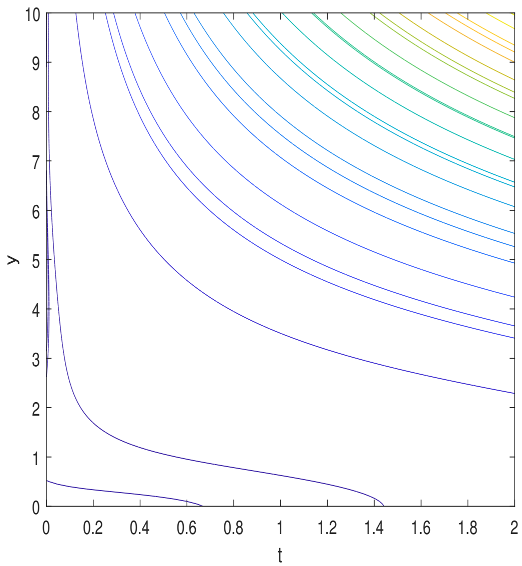
Näherungslösung: numerisch

Für die Lösungen gilt

$$z(t,u) := \frac{5}{3}t^3 + 7u^2t + \sin(u) = K$$

Lösungen sind Höhenlinien von z. Benutze contour in Matlab.

```
>> [t,u]=meshgrid(0:0.05:2,0:0.05:10);
>> z=(5/3)*t.^3 + 7*u.^2.*t+ sin(u);
>> contour(t,u,z,15)
>>
```



Alternativ bei Anfangswertaufgabe $u' = f(t, u)$: numerische Lösung z.B mit ode45.

Spezielle Typen von DGL'n zweiter Ordnung

$$\boxed{u''(t) = f\left(t,\, u(t),\, u'(t)\right)}$$

TYP 1) $\boxed{u''(t) = f\left(t,\, u'(t)\right)}$

$z' = f(t, z)$ Dgl erster Ordnung für z

Substituiere: $z(t) := u'(t)$. Dann ist $z'(t) := u''(t)$.

Neue DGL: $\boxed{z'(t) = f\left(t,\, z(t)\right)}$ ist erster Ordnung

lösen $\longrightarrow u' = z$
integrieren $\longrightarrow u$

BEISPIEL: $u''(t) = -2tu'(t), \qquad u(0) = u_0,\, u'(0) = v_0$

$z' = 2t \cdot z$ z.B. $v_0 = 5$

Substituiere: $z(t) := u'(t)$, $z'(t) := u''(t)$.

$$z' = -2tz \iff \frac{dz}{dt} = -2tz$$ separierbar

$$\int \frac{dz}{z} = -\int 2t\,dt \iff \ln|z| = -t^2 + \tilde{C}$$ $\Longrightarrow \exp^{\ln(|z|)} = e^{-t^2+\tilde{C}}$

$$|z| = e^{-t^2+\tilde{C}} \iff z = Ce^{-t^2} = u', \qquad u'(0) = v_0$$ z.B. $u'(0) = 5$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = v_0 e^{-t^2}$$ z.B. $u'(t) = 5e^{-t^2}$

Integrieren $\longrightarrow$ $u(t) = c + \int v_0 e^{-t^2} dt$

$$u(t) = \underbrace{u(0) + \underbrace{\int_0^t v_0 e^{-\tau^2} d\tau}_{\text{nicht analytisch lösbar}}}_{\text{weiter kommt man nicht!}} = u_0 + v_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \underbrace{erf(t)dt}_{\text{heißt „Fehlerfunktion"}}$$

TYP 2)

Autonome DGL: rechte Seite hängt nicht explizit von t ab.

$$\boxed{u''(t) \;=\; f\left(u(t),\, u'(t)\right)}$$

Allgemeines Verfahren: Später. Hier spezielle Form:

Rechte Seite hängt auch nicht explizit von u' ab:

$$\boxed{u''(t) = g(u(t))}$$

Für $u' \neq 0$ ist die Dgl. äquivalent zur Gleichung

$$u'u'' = u'g(u(t))$$

Hieraus erhält man

$$\int u'u''dt = \int g(\underbrace{u(t)}_{u})u'dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int g(u)du$$

$$\left(\frac{(u')^2}{2}\right)' = \frac{2u' \cdot u''}{2}$$

$$\int g(z)\, dz$$

Exkurs

$\int g(u(t))\, u'(t)\, dt$

Substituiere $z = u(t)$

$\frac{dz}{dt} = u'(t)$

$dz = u'(t)\, dt$

$= \int g(z)\, dz$

$\longrightarrow G(z) + C$

Rücksubst. $G(u(t)) + C$

Also gleich

$\int g(u(t))u'(t)\, dt$

$= \int g(u)\, du$

$= G(u) + C$

statt Umweg über z

Auflösen nach u' $\longrightarrow$ neue Dgl erster Ordnung für u.

Beispiel:

$$u''(t) = g(u(t)) = -e^{-2u(t)}, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

$$\int u'u''dt = \int g(u(t))u'dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int -e^{-2u}du$$

$\Longrightarrow (u')^2 = 2\left[\frac{e^{-2u}}{2}\right] + k = e^{-2u} + k$

$(u'(t))^2 = e^{-2u(t)} + k \longrightarrow \underbrace{u'(0)}_{1}{}^2 = \pm\sqrt{e^{-2\overset{0}{u(0)}} + k}$ $\Longrightarrow 1 = e^0 + k$

$\Longrightarrow k = 0$ und $+\sqrt{}$

$\Longrightarrow u'(t) = \left(e^{-u(t)\cdot 2}\right)^{1/2} = e^{-u(t)}$ neue Dgl 1. Ordnung für u

$\frac{du}{dt} = e^{-u}\cdot 1 \Longrightarrow e^u du = 1.dt \longrightarrow \int e^u du = \int 1.dt$

$\Longrightarrow e^u = t + c \xrightarrow{\ln} u = \ln(t + c)$

$u(0) = \ln(0 + c) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \boxed{c = 1}$

$u(t) = \ln(t+1)$.