Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 4 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Bernoullische DGL: $\boxed{u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^\alpha}$

$\alpha \neq 0, 1$

Substitution : $y(t) := (u(t))^{1-\alpha}$ liefert

$$y'(t) = (1-\alpha)(u(t))^{1-\alpha-1}u'(t) \Longleftrightarrow u' = \frac{u^\alpha \cdot y'}{1-\alpha}$$

Dies eingesetzt in die DGL ergibt

$$\frac{u^\alpha \cdot y'}{1-\alpha} = au + bu^\alpha$$ vorausgesetzt $u \neq 0$: multipliziere $\frac{1-\alpha}{u^\alpha}$

$$y' = (1-\alpha)au^{1-\alpha} + (1-\alpha)bu^0 \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{y'(t) = (1-\alpha)(a(t) \cdot y(t) + b(t))}$$

Beispiel:

$$u + \frac{e^t}{u^2} + 3tu' = 0, \qquad u(2) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{für } t \geq 2.$$

Sortieren: $3tu' = -u - \dfrac{e^t}{u^2} \Longrightarrow$

Bernoullische DGL $\quad u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^\alpha$

Hier: $\alpha =$ $\qquad$, $a(t) =$ $\qquad$, $b(t) =$

Substitution: $y := u^{1-\alpha} =$ $\qquad$ liefert die neue Dgl. :

$y' = (1-\alpha)(a \cdot y + b)$

Hier: $\qquad y' =$

Lösung nach Formel aus Seite 11 Vorlesung

$A'(t) = \hat{a}(t) =$

zum Beispiel $A(t) =$

Mit $\hat{b}(t) = -$ rechnen wir

$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t) =$

$B^*(t) = \int$

Die Wahl $B^*(t) =$ liefert

$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) =$

Rücksubstitution: $y = u^3 \implies u(t) =$

Lösung mittels Variation der Konstanten

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. $y_h' =$

nach Tabelle $y_h(t) = e^{\int \hat{a}(t)dt} =$

Lösung der inhomogenen Dgl.: Ansatz $y_p = c(t)y_H =$

Einsetzen in DGL. $y' = -\frac{1}{t} \cdot y - \dfrac{e^t}{t}$ liefert

$c'(t)y_H(t) \stackrel{!}{=}$ Inhomogenität $\Longleftrightarrow$

$c'(t) =$ $\qquad\Longleftarrow\quad c(t) =$ $\qquad\Longleftarrow\quad y_p(t) =$

Allg. Lösung der inhomogenen Dgl. $y = y_p + y_h =$

Riccatische Differentialgleichungen

Gegeben sei eine partikuläre Lösung u_p der Differentialgleichung

$$\boxed{u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^2 + c(t)\,.}$$

Sei u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung. Dann löst $w = u - u_p$ die Bernoullische Differentialgleichung:

$$w' = [a(t) + 2b(t)u_p(t)]w + b(t)w^2\,.$$

mit $\alpha = 2 \Longrightarrow$ Standardsubstitution: $\quad y := w^{1-2} = \dfrac{1}{u - u_p}$

Neue DGL: $$\boxed{y' = -(a + 2b \cdot u_p)\, y \;-\; b\,.}$$

Beispiel:

$$u' \;=\; -u^2 \;+\; \frac{2}{t^2}.$$

Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit

$a = 0,\ b = -1, c(t) = \frac{2}{t^2}$.

Wegen $\left(\dfrac{1}{t}\right)' = -\dfrac{1}{t^2}$ liegt der Ansatz $u_p = \dfrac{k}{t}$ nahe.

Einsetzen in die DGL für u liefert

$$-\frac{k}{t^2} = -\frac{k^2}{t^2} + \frac{2}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0$$

mit den Lösungen $k = -1$ und $k = 2$.

Wir setzen $u_p = -\frac{1}{t}$ und $y := \dfrac{1}{u - u_p} = \dfrac{1}{u + \frac{1}{t}}$.

Die Differentialgleichung für y lautet

$$y' = -[a + 2bu_p]y - b \quad \iff \quad y' = -\tfrac{2}{t}y + 1$$

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl $y_h' = -\frac{2}{t}y_h$:

$$y_h(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} \implies y_h =$$

Lösung der inhomogenen Dgl hier mit Variation der Konstanten!

$$c(t)t^{-2} = y_p \qquad \text{Einsetzen in DGL: } y' = -\frac{2}{t}y + 1$$

$$\overset{!}{=}$$

$$c'(t) = \qquad \Longleftarrow \qquad c(t) =$$

$$y = y_p + y_h = y_p + cy_H =$$

Alternativ: Formel aus Vorlesung 2 mit

$\hat{a}(t) = -[a + 2bu_p] =$ $\qquad$ $\hat{b}(t) = -b(t) =$

$A'(t) = \hat{a}(t)$

$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t) =$

$y(t) = e^{A(t)} \left(B^*(t) + C\right)$

Rücksubstitution:

Wir hatten $y := \dfrac{1}{u - u_p} = \dfrac{1}{u + \frac{1}{t}}$

$$u = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2}{t^3 + 3c} - \frac{1}{t} = \frac{2t^3 - 3c}{t^4 + 3ct}.$$

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$y'(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$u' = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL homogen Lineare DGL inhomogen	$y'_h(t) = a(t)y_h(t)$ $y'(t) \ = \ a(t)y(t) + b(t)$ Alternativ:	$y_h = e^{\int a(t)dt}$ $y_h = e^{A(t)+k} = cy_H$ $y_p = c(t) \cdot y_H$ $c'(t) \cdot y_H \overset{!}{=} b$ $y = c \cdot y_H + y_p$ $y(t) = e^{A(t)} \left(B^*(t) + C\right)$ $A'(t) = a(t), (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$	separierbar $\longleftarrow$ Ansatz
Bernoullische DGL	$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)(u(t))^\alpha$	$y := u^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ 1$	$\dot{y} = (1 - \alpha)(a \cdot y + b)$ linear
Riccatische DGL	$u'(t) = a(t)u + b(t)u^2 + c(t)$ b, c nicht ident. 0	$y := \frac{1}{u - u_p}$	$\dot{y} = -[a + 2b \cdot u_p] \cdot y - b$ linear

Wichtig: Typ erkennen.

Typ	DGL	Substitution	ggf. neue Diff.gleichung
	$t^2 y' = y^2 + t^2 e^{\frac{t}{y}}$		
	$u' - \frac{1}{\tan(t)} u + u^2 = \sin^2(t)$		
	$u' - \frac{2}{t} u + \frac{1}{t^2} u^2 = 4t^2$		
	$4u' + \frac{4}{t} u + u^3 = 0$		
	$y' = \cos(2t - 3y)$		
	$\dot{u} + \sin(t) u = \cos(t)$		

Exakte Differentialgleichungen

$$\boxed{\; g(t,u) \;+\; h(t,u)\,u'(t) = 0 \;\; \text{mit} \;\; g_u(t,u) \;=\; h_t(t,u) }$$

Ziel: finde (Potential) $\Psi(t,u)$ mit

$$\boxed{\Psi_t(t,u) = g(t,u) \text{ und } \Psi_u(t,u) = h(t,u)}$$

Dann gilt für jede Lösung $u(t)$ der DGL

$$\frac{d}{dt}\Psi(t,u(t)) = \;\Psi_t(t,u) + \Psi_u(t,u)\,u'(t) \;=\; g(t,u) + h(t,u)\,u'(t) = 0$$

Durch $\boxed{\;\Psi(t,u) = K\;}$ sind Lösungen der DGL gegeben.

Bsp. für LUM: $\Psi(t,u) = tu + e^{2t}u^3$

Berechnung von $\frac{d}{dt}\Psi(t, u(t))$

$$f \ : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}, \qquad f(t) \ = \ (\Psi \circ \phi)(t) \ = \ \Psi(t, u(t))$$

$$u \ : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}, \qquad C^2 - \text{Funktion}$$

$$\phi \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^2, \qquad \Psi \ : \ \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R} \qquad \phi, \ \Psi \qquad C^2 - \text{Funktionen}$$

$$\phi(t) \ = \ \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}, \qquad \Psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \mapsto \ \Psi(x_1, x_2) \in \mathbb{R}\,.$$

$$J\phi(t) \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}, \qquad J\Psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \Psi_{x_1} & \Psi_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$Jf(t) \ = \ J(\Psi \circ \phi) = \begin{pmatrix} \Psi_t & \Psi_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \Psi_t + \Psi_u \cdot \dot{u}$$

Vorgehen:

Schritt 1: Prüfe die Integrabilitätsbedingung : $g_u = h_t$

Schritt 2: Falls erfüllt: Dgl ist exakt. Bestimme Potential Ψ
Falls nicht: Dgl ist nicht exakt.

Schritt 3: Setze $\Psi(t,u) = K$. Falls möglich, löse nach u auf.

Beispiel a) $u(t)^2 - \dfrac{2}{t^2} + \ u'(t) \ = \ 0.$

$g_u = 2u \neq 0 = h_t \implies$ nicht exakt.

DGL ist Riccatisch. Siehe Beispiel oben.

Beispiel b) $e^t \cdot u \, + \, (1 + e^t) \cdot \dot{u}(t) \, = \, 0.$

$g_u = e^t = h_t \implies$ exakt.

DGL ist aber auch linear!

Lösung von b) als exakte DGL:

$e^t \cdot u \, + \, (1 + e^t) \cdot \dot{u}(t) \, = \, 0$

$\Psi_t(t, u) = \, g(t, u) = \, e^t \cdot u \implies \, \Psi(t, u) =$

$\Psi_u(t, u) = \, h(t, u) = \, 1 + e^t \overset{!}{=}$

$c(u) =$ $\qquad\qquad$ $\Psi(t,u) =$

Zu lösen ist also:

$$\Psi(t,u) = \; e^t \cdot u \, + \, u \; = \; K$$

Beispiel c) $(5\,t^2 \;+\; 7\,u^2) \;\;+\;\; (14\,t\,u \;+\; \cos u)\,u' \;\;=\;\; 0..$

Integrabilitätsbedingung: $g_u = \; h_t$

$(5\,t^2 \;+\; 7\,u^2)_u \;\;=$ $\qquad\qquad\qquad$ $(14\,t\,u \;+\; \cos u)_t =$

Potentialberechnung:

$\Psi_t = \; 5t^2 + 7u^2 \iff \Psi(t,u) =$

$\Psi_u = \; 14\,t\,u \;+\; \cos u \stackrel{!}{=}$

$c(u) =$

Zu lösen ist also:

$$\Psi(t,u) = \frac{5}{3}t^3 + 7u^2 t + \sin(u) = K$$

Explizites Auflösen nicht möglich.

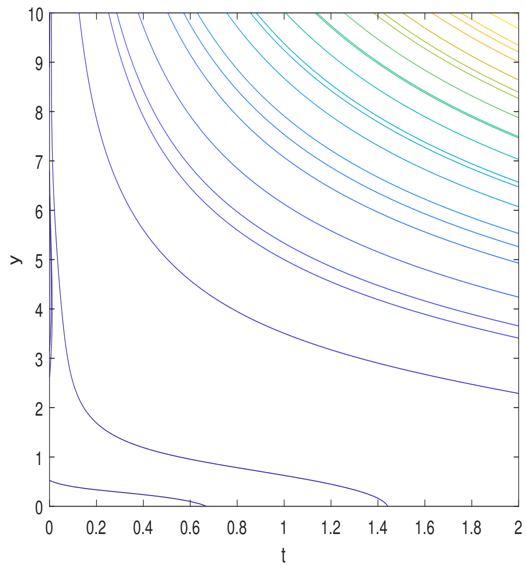
Näherungslösung: numerisch

Für die Lösungen gilt

$$z(t,u) := \frac{5}{3}t^3 + 7u^2 t + \sin(u) = K$$

Lösungen sind Höhenlinien von z. Benutze contour in Matlab.

```
>> [t,u]=meshgrid(0:0.05:2,0:0.05:10);
>> z=(5/3)*t.^3 + 7*u.^2.*t+ sin(u);
>> contour(t,u,z,15)
>>
```



Alternativ bei Anfangswertaufgabe $u' = f(t, u)$: numerische Lösung z.B mit ode45.

Spezielle Typen von DGL'n zweiter Ordnung

$$\boxed{u''(t) \; = \; f\,(t,\, u(t),\, u'(t))}$$

TYP 1) $\boxed{u''(t) \; = \; f\,(t,\, u'(t))}$

Substituiere: $z(t) := \; u'(t)$. Dann ist $z'(t) := \; u''(t)$.

Neue DGL: $\boxed{z'(t) \; = \; f\,(t,\, z(t))}$ ist erster Ordnung

BEISPIEL: $u''(t) = -2tu'(t), \qquad u(0) = u_0,\, u'(0) = v_0$

Substituiere: $z(t) := \; u'(t)$, $z'(t) := \; u''(t)$.

$$z' = -2tz \iff \frac{dz}{dt} = -2tz$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int 2t\,dt \iff \ln|z| = -t^2 + \tilde{C}$$

$$|z| = e^{-t^2+\tilde{C}} \iff z = Ce^{-t^2} = u', \qquad u'(0) = v_0$$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = v_0 e^{-t^2}$$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v_0 e^{-t^2} = u_0 + v_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot erf(t)dt$$

TYP 2)

Autonome DGL: rechte Seite hängt nicht explizit von t ab.

$$\boxed{\; u''(t) \;=\; f\left(u(t),\, u'(t)\right) }$$

Allgemeines Verfahren: Später. Hier spezielle Form:

Rechte Seite hängt auch nicht explizit von u' ab:

$$\boxed{\quad u''(t) = g(u(t)) \quad}$$

Für $u' \neq 0$ ist die Dgl. äquivalent zur Gleichung

$$u'u'' = u'g(u(t))$$

Hieraus erhält man

$$\int u'u''dt = \int g(u(t))u'dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int g(u)du$$

Auflösen nach u' $\longrightarrow$ neue Dgl erster Ordnung für u.

Beispiel:

$$u''(t) = g(u(t)) = -e^{-2u(t)}, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

$$\int u'u''dt = \int g(u(t))u'dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(u')^2 = \int -e^{-2u}du$$