Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2023/2024
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 3 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Äquivalenz von Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit Systemen erster Ordnung, separierbare Differentialgleichungen

Differentialgleichung n-ter Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung

Letzte HÜ behauptet: Jede Dgl $n-ter$ Ordnung lässt sich umschreiben auf ein äquivalentes System erster Ordnung.

Heute: Durchführung für lineare Differentialgleichung

Nichtlinear: völlig analog.

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gesucht $y: \ D \to \mathbb{R}^1, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{1\cdot\left(y^{(n)}(t)\right)^1 + a_{n-1}(t)\left(y^{(n-1)}(t)\right)^1 + \cdots + a_1(t)\left(y'(t)\right)^1 + a_0(t)\left(y(t)\right)^1 = b(t)}$$

Inhomogenität

mit $a_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$ stetig.

Lineares Differentialgleichungssystem

Gesucht : **Funktion** $\boldsymbol{y} : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)}$$

genauer: Bei bekannten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ wird gesucht $\boldsymbol{y}$ mit

$$\boldsymbol{y}'(t) := \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Bei gegebener Dgl. n-ter Ordnung definiere

$$\boldsymbol{y}(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

gesuchte Lösung der Dgl n-ter Ordnung

gesuchte Lösung des Systems

Dann gilt:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Schreibe Dgl

Tippfehler

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

in explizite Form um:

$$y^{(n)} = -a_{n-1}(t)\overset{y_n}{y^{n-1}} - \cdots - a_1(t)\overset{y_2}{y'} - a_0(t)\overset{y_1}{y} + b(t)$$

$$\text{Dann gilt } \boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ -a_0 y - a_1 y' - a_2 y'' - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$-a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{n-1} y_n \quad + \quad b(t)$$

Ziel: $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t)$

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ \end{pmatrix}}_{\vec{y}(t)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$=: \underbrace{\boldsymbol{A}(t)}_{?}\boldsymbol{y}(t) + \underset{?}{\boldsymbol{b}}(t)\,.$$

Beispiel: Schreiben Sie folgende Anfangswertaufgabe in eine äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung um

$$y'''(t) \underbrace{- y''(t) + 2y'(t) - 3y(t)} = 2t^3 e^{-t}, \qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 4,\ y''(1) = 9.$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \qquad y'''(t) = 3y(t) - 2y'(t) + 1\cdot y''(t) + 2t^3e^{-t}$$

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t^3e^{-t} \end{pmatrix}}_{\vec{b}(t)}$$

$$\vec{y}(1) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Teil 2: Separierbare Differentialgleichung

$y(t) \in \mathbb{R}^1$

Zur Erinnerung: Skalare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{F(y'(t), y(t), t) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y'(t) = f(t, y(t))}$$

- DGL'n oft nur numerisch lösbar
- spezielle Typen auch analytisch lösbar

Letzte HÜ gelöst: lineare Dgl $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$

Heute: **Separierbare DGL/Trennung der Variablen**

$$\boxed{y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) = f(t) \cdot g(y)}$$

Falls $g(y) \neq 0$:

hängt nur von t ab

hängt nur von $y(t)$ ab nicht explizit von t

Bringe alle Terme mit y auf eine Seite, alle ohne y auf die andere Seite

$$\frac{1}{g(y(t))}\, y'(t) = f(t) \Longrightarrow \int \frac{1}{g(\underbrace{y(t)}_{z}))}\, \overbrace{y'(t)\,dt}^{dz} = \int f(t)\,dt$$

$z = y(t)$

$z' = \frac{dz}{dt} = y'(t)$

$dz = y'(t)\,dt$

Substitution $\overset{z}{Y} := y(t), \quad d\overset{z}{Y}/dt = y'(t), \quad d\overset{z}{Y} = y'(t)dt$ liefert

$$\int \frac{1}{g(\underset{z}{Y})}\, \overset{dz}{dY} = \int f(t)\,dt$$

Übliche Kurzschreibweise

$$\boxed{y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Longrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt}$$

$\frac{dy}{g(y)} \cdot \frac{1}{dt} = f(t) \qquad | \cdot dt$

Beispiel 1: Ganz einfach

$$y'(t) = t\,y^2(t), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y^2 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dt} = t \qquad \Big| \cdot dt$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int t\,dt \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{y} + k_1 = \frac{t^2}{2} + k_2 \\ -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + k \end{cases} \qquad k = k_2 - k_1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y} = -\frac{t^2}{2} - k \qquad \boxed{y = \frac{1}{-\frac{t^2}{2} - k}}$$

Allgemeine Lösung mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq -\frac{t^2}{2}$

$$y(0) = \frac{1}{0 - k} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = -2$$

$$y(t) = \frac{1}{2 - \frac{t^2}{2}} \checkmark = \frac{2}{4 - t^2}$$

Nur definiert für $t \in [0, 2)$

Beispiel 2) $1 \cdot y'(t) + 2y(t)y'(t) - 2t = 0, \qquad y(2) = 0$

Sortieren: $y'(t)\left(1 + 2y(t)\right) = 2t$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \boxed{\frac{1}{1+2y}} \cdot 2t \qquad \Big| \cdot (1+2y)$$

$$\Longleftrightarrow (1+2y)\,dy \cdot \frac{1}{dt} = 2t \qquad \Big| \cdot dt$$

$$\Longleftrightarrow \int (1 + 2y)dy = \int 2tdt$$

$$\Longleftrightarrow y + y^2 = t^2 + C \iff y^2 + 1y - t^2 - C = 0 \qquad y = ?$$

p,q-Formel

$$\Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{t^2 + c + \frac{1}{4}}$$

$y(2) \overset{!}{=} 0$

$$y(2) = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2^2 + c + \tfrac{1}{4}} = \underbrace{-\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{4 + c + \tfrac{1}{4}} = 0}_{+1/2}$$

$$\Longrightarrow \pm\underbrace{\sqrt{4 + c + \tfrac{1}{4}}} = +\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow 4 + c + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow 4 + c = 0 \Longrightarrow c = -4$$

Also kommt nur das Pluszeichen vor der Wurzel in Frage und zwar mit $c = -4$.

Es ist also $y(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - 4 + \frac{1}{4}}$.

Beispiel 3)

$$y' = \frac{2t}{y + yt^2}, \qquad y(0) = -3$$

Sortieren:

$$y' = \frac{2t}{y(1+t^2)} = \frac{1}{y} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \quad | \cdot y$$

separieren

$$\frac{2t}{1+t^2} = y \, \frac{dy}{dt} \quad | \cdot dt$$

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int y\,dy \Longrightarrow \ln(1+t^2) + \hat{C} = \frac{y^2}{2}$$

$$2\ln(1+t^2) + C = y^2$$

$$y(t) = \pm\sqrt{2\ln(1+t^2) + C}$$

$$\circledast \int \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt$$

$$u = z(t)$$

$$\frac{du}{dt} = z'(t)$$

$$du = z'(t)\,dt$$

$$\circledast: \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + C$$

Mit $y(0) = -3$ folgt die Bedingung:

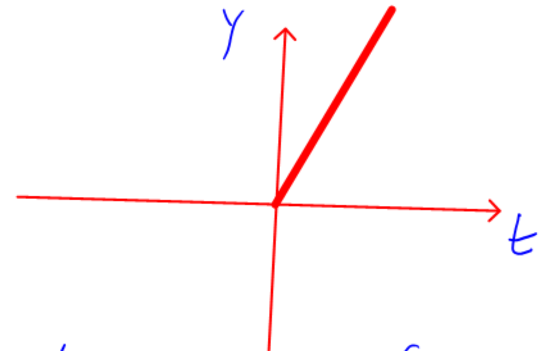
$$y(0) = \pm\sqrt{2\ln(1+0^2) + c} = \pm\sqrt{c} = -3$$

Also dieses Mal das Minuszeichen und $c = 9$ und

$$y(t) = -\sqrt{2\ln(1+t^2) + 9}.$$

Transformation auf separierbare DGL

Bestimmte Typen können auf separierbare DGL transformiert werden, z.B.



Typ A: $y' = f(\frac{y}{t})$

Mit Hilfe der Substitution $\boxed{u(t) := \frac{y(t)}{t}}$

wird die Dgl auf eine separierbare Dgl transformiert.

Dgl: $\underbrace{y'(t)}_{\text{umschreiben in u-Ausdruck}} = f(u)$

$u(t) \cdot t = y(t)$

$y'(t) = u'(t) \cdot t + u(t) = f(u)$

$u'(t)\, t = f(u) - u$

$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}$

Typ B: $y' = f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma)$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha + \beta f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma) \neq 0$.

Transformation auf separierbare Dgl Mit Hilfe der Substitution

$$\boxed{u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma}$$

HA 2a

Dgl $y' = f(u)$

Umschreiben in u-Ausdrücke

Beispiel zum Typ A)

$$2ty(t)y'(t) = t^2 + 3(y(t))^2, \qquad t \geq 1,\ y(1) = 2\,.$$

Zunächst stellen wir um nach y' um den Typ zu erkennen

$$y'(t) = \frac{\cancel{t^2}}{2\cancel{t}y} + \frac{3y^{\cancel{2}}}{2t\cancel{y}}$$

(*) $\boxed{y'(t) = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{t}{y}}_{\frac{1}{u}} + \frac{3}{2}\cdot \underbrace{\frac{y}{t}}_{u}}$

$$\underbrace{y'(t)}_{\text{umschreiben in u. Ausdrücke}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} + \frac{3}{2}\cdot u = f(u)$$

$$\boxed{u = \frac{y}{t}}$$

Substitution:

$$u(t) := \frac{y(t)}{t} \Longrightarrow y(t) = u(t)\cdot t \Longrightarrow y'(t) = u'(t)\cdot t + u(t)$$

Dgl.: $u'(t)\cdot t + u(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u(t)} + \frac{3}{2}u(t) \quad \Big| - u(t)$

(*)

$$u'(t)\cdot t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{2}\cdot u(t)$$

$$u'(t) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{2}u(t)}{t} = \frac{\frac{1+u^2(t)}{2u(t)}}{t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{1}{t} \qquad \cdot\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\frac{2u}{1+u^2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \int \cdot\, dt$$

$$\longrightarrow \frac{2u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln(1+u^2) = \ln(t) + c$$

$u = ?$

$$\xrightarrow{\exp} \cancel{\exp}(\cancel{\ln}(1+u^2)) = e^{\ln(t)+\hat{c}} = e^{\ln(t)} \cdot \underbrace{e^{\hat{c}}}_{c}$$

$$1+\underline{\underline{u^2}} = t \cdot c$$

$$u = \pm\sqrt{ct-1}$$

$$y = u \cdot t$$

$$\underline{y(t) = \pm\, t\sqrt{ct-1}}$$

$$y(1) = \underbrace{\pm\sqrt{c-1}}_{\stackrel{!}{=}\, +\sqrt{4}} \stackrel{!}{=} 2$$

$\longrightarrow$ + Zeichen und

$c-1 = 4 \Rightarrow c=5$

$$\underline{y(t) = +\, t\sqrt{5t-1}}$$

Beispiel zum Typ B) (Alte Klausuraufgabe)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(\overset{\alpha t + \beta y + \gamma}{t - 2y}) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Lösungsskizze:

Typ: $y'(t) = f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma)$ mit

$\alpha = 1 \qquad \beta = -2 \qquad \gamma = 0$

$f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma) = f(1t - 2y + 0) = e^{t-2y} + \frac{1}{2}$

$\boxed{u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma} = t - 2y$

$f(u) = e^u + \frac{1}{2}$

$u'(t) = \alpha + \beta y'(t) = 1 - 2y'(t)$

Dgl umschreiben

rechte Seite okay

$y' = e^u + \frac{1}{2}$

noch umschreiben in u-Ausdrücke

$$u'(t) = 1 - 2\Big[\underbrace{e^{t-2y} + \tfrac{1}{2}}_{y'}\Big] = 1 - 2\Big[e^u + \tfrac{1}{2}\Big] = 1 - 2e^u - 1$$

$$\frac{du}{dt} = -2e^u$$

Für $\alpha + \beta y'(t) = 1 - 2\left[e^{u} + \frac{1}{2}\right] \neq 0$ erhalten wir also

$$\frac{du}{dt} = -2e^{u} \quad \xRightarrow{e^{u} \neq 0} \quad \int \frac{du}{-e^{u}} = \int 2\, dt \iff \int -e^{-u}\, du = 2t + C$$

$$\Longrightarrow e^{-u} = 2t + C \overset{\ln}{\iff} -u = \ln(2t+C)$$

sofern $2t+C>0$

$$\Longrightarrow u = -\ln(2t+c)$$

Wir hatten
$u = t - 2y$

$$\Longrightarrow t - 2y = -\ln(2t+c)$$

$$\iff t + \ln(2t+c) = 2y$$

$$\iff y = \frac{1}{2}\left[t + \ln(2t+c)\right]$$

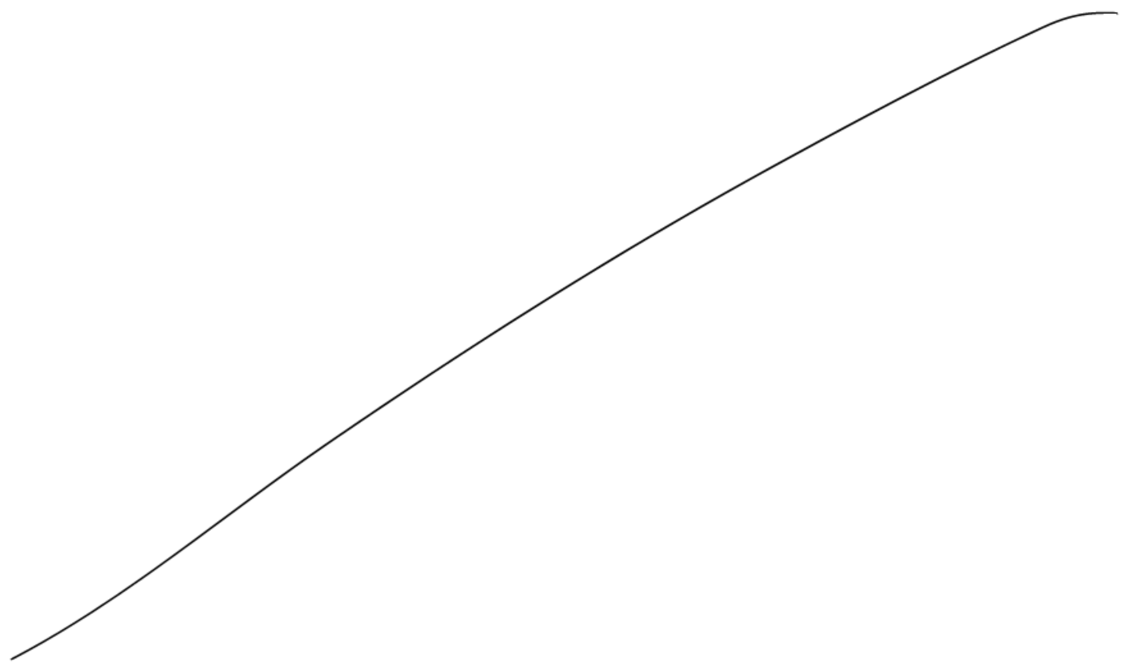
$$y(0) \overset{!}{=} 0$$

$$y(0) = \frac{1}{2}\left[0 + \ln(c)\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \ln(c) = 0 = \ln(1)$$

$$\Longrightarrow c = 1$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[t + \ln(2t+1)\right]$$



Überprüfung der Lösung: Einsetzen in die Dgl

Linke Seite:

$$y'(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+2t)\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2t},$$

rechte Seite

$$\exp(t - 2y) + 0.5 = \exp\left(t - 2\cdot\frac{1}{2}(t + \ln(1+2t))\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \exp\left(\cancel{t} - \cancel{t} - \ln(1+2t)\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{\exp}(\cancel{\ln}(1+2t))} + \frac{1}{2}$$

Differentialgleichung (gerade geprüft)
und Anfangsbedingung (oben geprüft) sind also erfüllt.

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL	
separierbar	$\dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$		Hausaufg. 1 Präsenzaufgabe 2a
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar	Präsenzaufg. 2b
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar	Hausaufgabe 2
Lineare DGL homogen	$\dot{y}_h(t) = a(t)y_h(t)$	$y_h = e^{\int a(t)dt}$ $y_h = e^{A(t)+k} = cy_H$	separierbar	
Lineare DGL inhomogen	$\dot{y}(t) \ = \ a(t)y(t) + b(t)$	$y_P = y = c(t) \cdot y_H$ $c'(t) \cdot y_H \overset{!}{=} b$ $y = c \cdot y_H + y_P$	$\longleftarrow$ Ansatz	