Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 3 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Äquivalenz von Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit Systemen erster Ordnung, separierbare Differentialgleichungen

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Differentialgleichung n-ter Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung

Letzte HÜ behauptet: Jede Dgl $n-ter$ Ordnung lässt sich umschreiben auf ein äquivalentes System erster Ordnung.

Heute: Durchführung für lineare Differentialgleichung

Nichtlinear: völlig analog.

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gesucht $y: D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)}$$

mit $a_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$ stetig.

Lineares Differentialgleichungssystem

Gesucht : **Funktion** $\boldsymbol{y}: D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)}$$

genauer: Bei bekannten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ wird gesucht $\boldsymbol{y}$ mit

$$\boldsymbol{y}'(t) := \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Bei gegebener Dgl. n-ter Ordnung definiere

$$\boldsymbol{y}(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Schreibe Dgl

$$y^{(n)} \;+\; a_{n-1}(t)y^{(n-1)} \;+\; \cdots \;+\; a_1(t)y' \;+\; a_0(t)y \;=\; b(t)$$

in explizite Form um:

$$y^{(n)} \;= -\,a_{n-1}(t)y^{n-1} \;-\; \cdots \;-\; a_1(t)y' \;-\; a_0(t)y \;+\; b(t)$$

Dann gilt $\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ \end{pmatrix} +$

Ziel: $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t)$

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$=: \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t) \; + \; \boldsymbol{b}(t) \, .$$

Beispiel: Schreiben Sie folgende Anfangswertaufgabe in eine äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung um

$$y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) \;=\; 2t^3 e^{-t}, \qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 4,\ y''(1) = 9.$$

Teil 2: Separierbare Differentialgleichung

Zur Erinnerung: Skalare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{F(y'(t), y(t), t) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y'(t) \;=\; f\,(t,\, y(t))}$$

- DGL'n oft nur numerisch lösbar

- spezielle Typen auch analytisch lösbar

Letzte HÜ gelöst: lineare Dgl $\boxed{y'(t) = \; a(t)y(t) + b(t)}$

Heute: **Separierbare DGL/Trennung der Variablen**

$$\boxed{y'(t) \;=\; f(t) \cdot g(y(t)) = \; f(t) \cdot g(y)}$$

Falls $g(y) \neq 0$:

$$\frac{1}{g(y(t))}\, y'(t) \;=\; f(t) \;\Longrightarrow\; \int \frac{1}{g(y(t))}\, y'(t)\, dt \;=\; \int f(t)\, dt$$

Substitution $Y := y(t), \quad dY/dt = y'(t), \quad dY = y'(t)dt$ liefert

$$\int \frac{1}{g(Y)}\, dY \;=\; \int f(t)\, dt$$

Übliche Kurzschreibweise

$$\boxed{y'(t) = \frac{dy}{dt} \;=\; f(t)g(y) \;\Longrightarrow\; \frac{dy}{g(y)} \;=\; f(t)\, dt}$$

Beispiel 1: Ganz einfach

$$y'(t) = t\,y^2(t), \qquad y(0) = \tfrac{1}{2}$$

Beispiel 2) $\quad y'(t) + 2y(t)y'(t) - 2t = 0, \qquad y(2) = 0$

Sortieren:

$$\Longleftrightarrow (1+2y)dy = 2tdt$$

$$\Longleftrightarrow y + y^2 = t^2 + C \iff y^2 + y - t^2 - C = 0$$

$$\Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{t^2 + c + \frac{1}{4}}$$

$y(2) = 0$

$y(2) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2^2 + c + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4 + c + \frac{1}{4}} = 0$

Also kommt nur das Pluszeichen vor der Wurzel in Frage und zwar mit $c = -4$.
Es ist also $y(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - 4 + \frac{1}{4}}$.

Beispiel 3)

$$y' = \frac{2t}{y + yt^2}, \qquad y(0) = -3$$

Sortieren:

Mit $y(0) = -3$ folgt die Bedingung:

$$y(0) = \pm\sqrt{2\ln(1 + 0^2) + c} = \pm\sqrt{c} = -3$$

Also dieses Mal das Minuszeichen und $c = 9$ und

$$y(t) = -\sqrt{2\ln(1 + t^2) + 9}.$$

Transformation auf separierbare DGL

Bestimmte Typen können auf separierbare DGL transformiert werden, z.B.

Typ A: $y' = f(\frac{y}{t})$

Mit Hilfe der Substitution $\boxed{u(t) := \frac{y(t)}{t}}$

wird die Dgl auf eine separierbare Dgl transformiert.

Typ B: $y' = f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma)$

wobei α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha + \beta f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma) \neq 0$.

Transformation auf separierbare Dgl Mit Hilfe der Substitution

$$\boxed{u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma}$$

Beispiel zum Typ A)

$$2ty(t)y'(t) = t^2 + 3(y(t))^2, \qquad t \geq 1,\ y(1) = 2\,.$$

Zunächst stellen wir um nach y' um den Typ zu erkennen

Substitution:

$u(t) := \frac{y(t)}{t} \Longrightarrow y(t) = u(t) \cdot t \Longrightarrow y'(t) =$

Dgl.:

Beispiel zum Typ B) (Alte Klausuraufgabe)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(t-2y) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Lösungsskizze:

Typ: $y'(t) = f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma)$ mit

$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

$f(\alpha t + \beta y(t) + \gamma) = f(\qquad\qquad) =$

$u(t) := \alpha t + \beta y(t) + \gamma =$

$u'(t) = \alpha + \beta y'(t) =$

Für $\alpha + \beta y'(t) = \qquad\qquad \neq 0$ erhalten wir also

$$\frac{du}{dt} =$$

Überprüfung der Lösung: Einsetzen in die Dgl

Linke Seite:

$$y'(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+2t)\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2t},$$

rechte Seite

$$\begin{aligned}\exp(t-2y) + 0.5 &= \exp\left(t - 2 \cdot \frac{1}{2}(t + \ln(1+2t))\right) + \frac{1}{2} \\ &= \exp(t - t - \ln(1+2t)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\exp(\ln(1+2t))} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Differentialgleichung (gerade geprüft)
und Anfangsbedingung (oben geprüft) sind also erfüllt.

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$\dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL homogen	$\dot{y}_h(t) = a(t)y_h(t)$	$y_h = e^{\int a(t)dt}$ $y_h = e^{A(t)+k} = cy_H$	separierbar
Lineare DGL inhomogen	$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)$	$y_P = y = c(t) \cdot y_H$ $c'(t) \cdot y_H \stackrel{!}{=} b$ $y = c \cdot y_H + y_P$	$\longleftarrow$ Ansatz