Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2023/2024

Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Klassifikation von Differentialgleichungen, Lineare Differentialgleichungen Teil 1

Was ist eine Differentialgleichung?

Bisher : algebraische Gleichungen $\longrightarrow$ Lösungen : Zahlen/Vektoren

Jetzt : Differentialgleichungen $\longrightarrow$ Lösungen: Funktionen

Gesucht : **Funktion** $y : I \to \mathbb{R}, \quad I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit

$$\boxed{F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m)}(t)) = 0 \qquad \text{(implizite Dgl.)}}$$

oder

$$\boxed{y^{(m)}(t) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)) \qquad \text{(explizite Dgl.)}}$$

$m =$ **Ordnung** der Differentialgleichung

Lineare Differentialgleichung

$$\boxed{A_m(t)y^{(m)}(t) + \ldots + A_2(t)y''(t) + A_1(t)y'(t) + A_0(t)y(t) = b(t)}$$

implizit

bzw.

$$\boxed{y^{(m)}(t) = a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t)}$$

explizite Dgl

oder kurze Schreibweise

$$\boxed{y^{(m)} = a_{m-1}(t)y^{(m-1)} + \ldots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)}$$

homogen falls $b(t) = 0$ anderenfalls **inhomogen**

wie bei

$A\vec{v} = \vec{b}$

$A\vec{v} = \vec{0}$

Beispiele:

$t \cdot y' + 2y - 1 = 0$ Ordnung= 1 linear? ✓ explizit/implizit

$t\,y'(t) + 2y(t) - 1 = 0$

$y' = \frac{1-2y}{t}$

$t^2 \cdot y' + 2y - 1 = 0$ Ordnung= 1 linear? ✓ explizit/implizit

$y' = \frac{1-2y}{t^2}$

e^{t-2y}

$1\,(y') = \exp(t-2y) + 0.5$ Ordnung= 1 linear? Nein explizit/implizit

$\exp(t-2y)$

$1 \cdot y'''(t) - 4y'(t) = \underbrace{e^{2t} \cdot \sin(t) + e^{-2t} \cdot \sin(t)}_{b(t) \neq 0}$

Ordnung= 3 linear? ✓ explizit/implizit

zugehörige homogene Dgl:

$y'''(t) - 4y'(t) = 0$

$n - te$ Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung

Also hier nur erste Ordnung! Zunächst skalare Differentialgleichung.

Gesucht : **Funktion** $y : D \to \mathbb{R}^1, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y'(t) = f\,(t, y(t))}$$

Beispiel:

Differentialgleichung

explizite Form

$t \cdot y' - y - t^2 = 0$ oder $y'(t) = \frac{1}{t}\, y(t) + t \qquad t \geq 1$

$t \cdot y'(t) - y(t) - t^2 = 0$

Beh.: Jede Funktion $y(t) = ct + t^2$, $c \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL

Nachweis: $y'(t) = c + 2t$

$\frac{1}{t}\, y(t) + t = \frac{1}{t}(ct + t^2) + t = c + t + t = c + 2t$ ✓

$\Longrightarrow$ **i.d.R. unendlich viele Lösungen!**

$\Longrightarrow$ **Anfangs- oder Randwerte nötig (AWe/RWe)**

Physikalisch klar: Geschwindigkeit bekannt $\longrightarrow$ Ort?

- DGL'n oft nur numerisch lösbar

$x^5 - 8x - 16 = 0$

- spezielle Typen auch analytisch lösbar

$x^2 - 8x - 16 = 0$

Lineare DGL 1.Ordnung $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$

Zugehörige **homogene** DGL : $y_h'(t) = a(t)y_h(t)$

Inhomogenität : $b(t)$ additiver Term der kein y enthält

Eingangsbeispiel: $y'(t) = \frac{1}{t}\,y(t) + t \quad t \geq 1$

Also

$a(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad b(t) = t$

Zugehörige **homogenen** DGL : $y_h'(t) = \frac{1}{t} y_h(t) + 0$

$A\vec{v} = \vec{b}$ $\qquad A\vec{v} = \vec{0}$

Vorgehen für Lineare DGL 1.Ordnung

Variante 1, Vorlesung Seiten 9-12 (Dort andere Herleitungsmethode)

Zunächst die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung

Substitution

$u = y_h(t)$

$\frac{du}{dt} = y_h'(t)$

$du = dt \cdot y_h'(t)$

$$y_h'(t) = a(t)y_h(t) \iff \int \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} dt = \int a(t)\, dt \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int a(t)\, dt$$

$$\ln(|u|) = \int a(t)dt \iff \ln|y_h| = \int a(t)dt \xrightarrow{\exp} |y_h| = e^{\int a(t)dt} = e^{A(t)+k} = \ldots$$

$$= e^{A(t)} \cdot e^{k}$$

Wobei $A'(t) = a(t)$.

$$Y_h(t) = \underbrace{\pm e^{k}}_{c} e^{A(t)}$$

$$\boxed{Y_h(t) = c\, e^{A(t)}}$$

$Y_H(t)$

$c \in \mathbb{R}$

$c = 0 \Downarrow y \equiv 0$

Jetzt die inhomogene Differentialgleichung

Definiere B^* über $(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$

Dann sind alle Lösungen von $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ gegeben durch

$$\boxed{y(t) = e^{A(t)}(B^*(t)+C), \qquad \text{mit } A'(t) = a(t),\ (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\ C \in \mathbb{R}}$$

Anwendung auf unser Beispiel: $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t$ $\qquad t \geq 1$

$$\boxed{y(t) = e^{A(t)}(B^*(t)+C),} \quad \text{mit } A'(t) = a(t),\ (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\ C \in \mathbb{R}$$

$a(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad A(t) = \int \frac{1}{t}\, dt$ $\quad$ z.B. $\boxed{A(t) = \ln(t)}$

$$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t) = e^{-\ln(t)} \cdot t = \frac{1}{e^{\ln(t)}} \cdot t$$

$$= \frac{1}{t} \cdot t = 1 = (B^*(t))'$$

z.B. $\boxed{B^*(t) = t}$

$$y(t) = e^{\ln(t)}(t + c) = t(t + c) = t^2 + ct$$

Variante 2, Variation der Konstanten

- Bestimme allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y(t) \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = a(t)dt$$

$$\Longleftrightarrow \ln|y| = \int a(t)dt \longrightarrow y_h = e^{\int a(t)dt} = e^{A(t)+k} = \ldots$$

siehe Seite 7 oben

$c \cdot \underbrace{e^{A(t)}}_{y_H(t)}$

Exakt wie oben $\boxed{y_h(t) = c \cdot y_H(t)}$

Wobei $\boxed{y_H'(t) = a(t) \cdot y_H(t)}$

- Bestimme eine (spezielle/partikuläre) Lsg. y_p der inhom.Aufg.

  – über **Variation der Konstanten**.

zu erfüllen

$y_p'(t) \overset{!}{=} a(t)\, y_p(t) + b(t)$

Ansatz $\boxed{y_p(t) = c(t)y_H(t)}$

Zu erfüllen: $y_p' - a(t) \cdot y_p \overset{!}{=} b(t)$

Frage: wie $c(t)$ wählen, damit das gilt?

$$y_p' - a(t)\cdot y_p = c'(t)y_H(t) + \underbrace{c(t)y_H'(t) - a(t)\cdot c(t)y_H(t)}_{0 \text{ wegen } y_H' = a(t)\,y_H} \overset{!}{=} b(t)$$

$$= \boxed{c'(t)y_H(t) \overset{!}{=} b(t)}$$

$(B^*)'$

Bestimme hieraus $c'(t) = \frac{b(t)}{y_H(t)}$,

integriere $\longrightarrow c(t)$

Einsetzen in Ansatz $\longrightarrow y_p(t)$

- Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c\cdot y_H(t) + y_p(t) \qquad c \in \mathbb{R}}$$

Anwendung auf unser Beispiel: $y'(t) = \frac{1}{t}\, y(t) + t$

$$y_h = e^{\int a(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln(t)+k} = \underbrace{e^{\ln(t)}}_{t} \cdot \underbrace{e^{k}}_{\pm c}$$

$$\boxed{y_h(t) = c\,t}$$

$= c\, y_H(t)$

erfüllt $y_h'(t) = \frac{1}{t} y_h(t)$

$$y_H(t) = t$$

Ansatz

$$\boxed{y_p(t) = c(t) \cdot t}$$

zu erfüllen

$$c'(t) y_H(t) \stackrel{!}{=} b(t) \iff c'(t) \cdot \cancel{t} = \cancel{t}$$

$c'(t) = 1$

z. B. $c(t) = t$

$$\boxed{y_p(t) = c(t)\, y_H(t) = t \cdot t = t^2}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c\,t + t^2}$$

Bei gegbenem Anfangswert, z.B. $y(1) = 3$:

$$y(1) = c \cdot 1 + 1^2 \stackrel{!}{=} 3 \implies c = 2$$

$$y(t) = 2t + t^2$$

Lösung der Anfangswertaufgabe

Beispiel 2) $1 \cdot y' = t^2 \cdot y + \underbrace{t^2 e^{\frac{t^3}{3}}}_{b(t)}$

Variante I) Vorlesung

$$\boxed{y(t) = e^{A(t)}(B^*(t)+C), \qquad \text{mit } A'(t) = a(t),\ (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\ C \in \mathbb{R}}$$

$A'(t) = a(t) = t^2$ z.B. $A(t) = \frac{t^3}{3}$

$A(t) = \int t^2 \, dt$

$$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t) = e^{-\frac{t^3}{3}} t^2 e^{\frac{t^3}{3}} = t^2 e^{\overbrace{\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3}}^{0}} = t^2$$

$$\underline{\underline{(B^*)' = t^2}}$$

z.B. $B^*(t) = \frac{t^3}{3}$

$$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) = \underbrace{\underbrace{e^{\frac{t^3}{3}}\left(\frac{t^3}{3}\right.}_{y_P} \left. + C\right)}_{y_h}$$

Variante II) Variation der Konstanten: $y_h(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ $a(t) = t^2$

Wie oben $y_h = e^{\int t^2 dt} = e^{\frac{t^3}{3}+k}$ $= e^{t^3/3} \cdot e^k$ $\longrightarrow y_h = c \cdot y_H = c \cdot e^{\frac{t^3}{3}}$

Ansatz $\boxed{y_p(t) := c(t)y_H(t)}$

Ansatz erfüllt DGL $y' = t^2 \cdot y + t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

wenn $\boxed{c'(t)y_H(t) \stackrel{!}{=} b(t)}$.

zu erfüllen: $c'(t) \cdot \cancel{e^{t^3/3}} = t^2 \cancel{e^{t^3/3}} \Longleftrightarrow c'(t) = t^2$

Zum Beispiel: $c(t) = \frac{t^3}{3}$ $\Longrightarrow y_p(t) = \frac{t^3}{3} y_H(t) = \frac{t^3}{3} e^{\frac{t^3}{3}}$

Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Aufgabe.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + c \cdot y_H(t) = \left(\frac{t^3}{3} + c\right)e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + c \cdot y_H(t) = (\frac{t^3}{3} + c)e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Ist zum Beispiel der Anfangswert $y(0) = 1$ vorgegeben, erhält man

$$y(0) = \left(\frac{0^3}{3} + c\right)e^{0^3/3} = c \overset{!}{=} 1 \qquad y(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)e^{\frac{t^3}{3}}$$

Ist dagegen zum Beispiel der Anfangswert $y(3) = 1$ vorgegeben, erhält man

$$y(3) = \left(\frac{3^3}{3} + c\right)e^{3^3/3} = (9 + c)e^{9} \overset{!}{=} 1$$

$$c = (e^{-9} - 9)$$

$$y(t) = \left(\frac{t^3}{3} + e^{-9} - 9\right)e^{\frac{t^3}{3}}$$

Überprüfung von Lösungen/Linearität

Beh.: $x = 2$ löst $x^5 - 2x^3 - 16 = 0$.

Beweis ? Einsetzen

Beispiel A)

Beh.: $y_1(t) = e^t$ und $y_2(t) = e^{2t}$ lösen beide die Differentialgleichung

$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Nachweis:

$y_1(t) = e^t$
$y_1'(t) = e^t$
$y_1''(t) = e^t$

Dgl: $e^t - 3e^t + 2e^t = 0$ ✓

$y_2(t) = e^{2t}$
$y_2'(t) = 2e^{2t}$
$y_2''(t) = 4e^{2t}$

$4e^{2t} - 3 \cdot 2e^{2t} + 2e^{2t} = 0$ ✓

Beh.:Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der Dgl. so löst auch
$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ die Dgl. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Beweis:

y_1 ist Lösung: $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$

y_2 ist Lösung: $y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 0$

Zuerfüllen: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \Longrightarrow y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) \Longrightarrow y''(t) = c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)$$

Dgl.:

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' - 3(c_1 y_1' + c_2 y_2') + 2(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$$\underbrace{(c_1 y_1'' - c_1 3 y_1' + c_1 2 y_1)}_{0} + \underbrace{(c_2 y_2'' - c_2 3 y_2' + c_2 2 y_2)}_{0} = 0 \quad ✓$$

$$c_1 \underbrace{(y_1'' - 3y_1' + 2y_1)}_{0} \qquad c_2 \underbrace{(y_2'' - 3y_2' + 2y_2)}_{0}$$

Beispiel B)

$y_1(t) = e^t + 1$ und $y_2(t) = e^{2t} + 1$ lösen beide die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2$$

Nachweis: Einsetzen. Löst $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ebenfalls die Dgl. ?

y_1 ist Lösung: $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 2$ //

y_2 ist Lösung: $y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 2$ //

$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \implies y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) \implies y''(t) = y_1''(t) + y_2''(t)$

$y'' - 3y' + 2y =$

$$y_1'' + y_2'' - 3y_1' - 3y_2' + 2y_1 + 2y_2 =$$

$$\underbrace{(y_1'' - 3y_1' + 2y_1)}_{\cdot 2} + \underbrace{(y_2'' - 3y_2' + 2y_2)}_{\cdot 2} = 4 \neq 2 \text{ ↯}$$

Grund: Die Dgl ist inhomogen

Beispiel C)

$y_1(t)$ und $y_2(t)$ seien zwei nicht identisch verschwindende Lösungen der Differentialgleichung,

nicht linear

$$y'(t) - (y(t))^3 = 0$$

Löst $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ebenfalls die Differentialgleichung?

y_1 ist Lösung $\Rightarrow y_1'(t) = (y_1(t))^3$

y_2 ist Lösung $\Rightarrow y_2'(t) = (y_2(t))^3$ $\Big\}$ I

Dgl. für $y = y_1 + y_2$ lautet

$$y' - (y)^3 = y_1' + y_2' - (y_1+y_2)^3 \overset{\mathrm{I}}{=} \cancel{y_1^3} + \cancel{y_2^3} - (\cancel{y_1^3} + 3y_1^2 y_2 + 3y_1 y_2^2 + \cancel{y_2^3})$$

$$= -3y_1^2 y_2 - 3y_1 y_2^2 = \underbrace{-3y_1 y_2}_{\neq 0}(y_1+y_2) \overset{!}{=} 0$$

geht nur wenn $y_2 = -y_1$ also nicht für beliebig Lösungen der Dgl

Grund: Die Dgl. ist nicht linear