Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2023/2024
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Klassifikation von Differentialgleichungen, Lineare Differentialgleichungen Teil 1

Was ist eine Differentialgleichung?

Bisher : algebraische Gleichungen $\longrightarrow$ Lösungen : Zahlen/Vektoren

Jetzt : Differentialgleichungen $\longrightarrow$ Lösungen: Funktionen

Gesucht : **Funktion** $y : I \to \mathbb{R}, \quad I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit

$$\boxed{F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m)}(t)) \;=\; 0 \qquad \text{(implizite Dgl.)}}$$

oder

$$\boxed{y^{(m)}(t) \;=\; \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)) \qquad \text{(explizite Dgl.)}}$$

$m =$ **Ordnung** der Differentialgleichung

Lineare Differentialgleichung

$$\boxed{A_m(t)y^{(m)}(t) + \ldots + A_2(t)y''(t) + A_1(t)y'(t) + A_0(t)y(t) = b(t)}$$

bzw.

$$\boxed{y^{(m)}(t) = a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t)}$$

oder

$$\boxed{y^{(m)} = a_{m-1}(t)y^{(m-1)} + \ldots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)}$$

homogen falls $b(t) = 0$ anderenfalls **inhomogen**

Beispiele:

$t \cdot y' + 2y - 1 = 0$ Ordnung= linear? explizit/implizit

$t^2 \cdot y' + 2y - 1 = 0$ Ordnung= linear? explizit/implizit

$y' = \exp(t - 2y) + 0.5$ Ordnung= linear? explizit/implizit

$y'''(t) - 4y'(t) = e^{2t} \cdot \sin(t) + e^{-2t} \cdot \sin(t)$

Ordnung= linear? explizit/implizit

$y'''(t) - 4y'(t) = 0$

$n - te$ Ordnung $\Longleftrightarrow$ System erster Ordnung

Also hier nur erste Ordnung! Zunächst skalare Differentialgleichung.

Gesucht : **Funktion** $y : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Beispiel:

Differentialgleichung

$t \cdot y' - y - t^2 = 0$ oder $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t \qquad t \geq 1$

Beh.: Jede Funktion $y(t) = ct + t^2$, $c \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL

Nachweis:

$\Longrightarrow$ **i.d.R. unendlich viele Lösungen!**

$\Longrightarrow$ **Anfangs- oder Randwerte nötig (AWe/RWe)**

Physikalisch klar: Geschwindigkeit bekannt $\longrightarrow$ Ort?

- DGL'n oft nur numerisch lösbar

- spezielle Typen auch analytisch lösbar

Lineare DGL 1.Ordnung $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$

Zugehörige **homogene** DGL : $y_h'(t) = a(t)y_h(t)$

Inhomogenität : $b(t)$ additiver Term der kein y enthält

Eingangsbeispiel: $y'(t) = \frac{1}{t}\, y(t) + t \qquad t \geq 1$

Also

$a(t) =$ $b(t) =$

Zugehörige **homogenen** DGL :

Vorgehen für Lineare DGL 1.Ordnung

Variante 1, Vorlesung Seiten 9-12 (Dort andere Herleitungsmethode)

Zunächst die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung

$$y_h'(t) = a(t)y_h(t) \Longleftrightarrow \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = a(t)$$
$$\Longleftrightarrow \ln|y_h| = \int a(t)dt \longrightarrow y_h = e^{\int a(t)dt} = e^{A(t)+k} = \ldots$$

Wobei $A'(t) = a(t)$.

Jetzt die inhomogene Differentialgleichung

Definiere B^* über $(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$

Dann sind alle Lösungen von $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ gegeben durch

$$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t)+C), \qquad \text{mit } A'(t) = a(t),\ (B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t),\ C \in \mathbb{R}$$

Anwendung auf unser Beispiel: $y'(t) = \frac{1}{t}\, y(t) \,+\, t$

$y(t) = \, e^{A(t)}(B^*(t){+}C),$ mit $A'(t) = a(t),\; (B^*(t))' = \, e^{-A(t)} {\cdot} b(t),\; C \in \mathbb{R}$

Variante 2, Variation der Konstanten

- Bestimme allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y(t) \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = a(t)dt$$
$$\Longleftrightarrow \ln|y| = \int a(t)dt \longrightarrow y_h = e^{\int a(t)dt} = e^{A(t)+k} = ...$$

Exakt wie oben $\boxed{y_h(t) = c \cdot y_H(t)}$

Wobei $\boxed{y'_H(t) = a(t) \cdot y_H(t)}$

- Bestimme eine (spezielle/partikuläre) Lsg. y_p der inhom.Aufg.

  – über **Variation der Konstanten**.

Ansatz $\boxed{y_p(t) = c(t)y_H(t)}$

Zu erfüllen: $y'_p - a(t) \cdot y_p \stackrel{!}{=} b(t)$

$$y_p' - a(t) \cdot y_p = c'(t) y_H(t) + c(t) y_H'(t) - a(t) \cdot c(t) y_H(t)$$

$$= \boxed{\; c'(t) y_H(t) \stackrel{!}{=} b(t) \;}$$

Bestimme hieraus $c'(t) = \frac{b(t)}{y_H(t)}$,

integriere $\longrightarrow c(t)$

Einsetzen in Ansatz $\longrightarrow y_p(t)$

- Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\boxed{\; y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \cdot y_H(t) + y_p(t) \qquad c \in \mathbb{R} \;}$$

Anwendung auf unser Beispiel: $y'(t) = \frac{1}{t}\, y(t) \,+\, t$

$$y_h = e^{\int a(t)dt} = \; e^{\int \frac{1}{t}dt} = \; e^{\ln(t)+k} =$$

$$y_H(t) =$$

$$y_p(t) =$$

$$c'(t)y_H(t) \stackrel{!}{=} \; b(t) \;\Longleftrightarrow$$

$$y_p(t) =$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) =$$

Bei gegbenem Anfangswert, z.B. $y(1) = 3$:

Beispiel 2) $y' = t^2 \cdot y + t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

Variante I) Vorlesung

$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t)+C)$, mit $A'(t) = a(t)$, $(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$, $C \in \mathbb{R}$

$A'(t) = a(t) =$

$(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot b(t)$

Variante II) Variation der Konstanten:

Wie oben $y_h = e^{\int t^2 dt} = e^{\frac{t^3}{3}+k}$ $\longrightarrow y_h = c \cdot y_H = c \cdot e^{\frac{t^3}{3}}$

Ansatz $\boxed{y_p(t) := c(t) y_H(t)}$

Ansatz erfüllt DGL $y' = t^2 \cdot y + t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

wenn $\boxed{c'(t) y_H(t) = b(t)}$.

zu erfüllen:

Zum Beispiel: $c(t) =$ $\Longrightarrow y_p(t) =$

Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Aufgabe.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + c \cdot y_H(t) = (\frac{t^3}{3} + c) e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + c \cdot y_H(t) = (\frac{t^3}{3} + c)e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Ist zum Beispiel der Anfangswert $y(0) = 1$ vorgegeben, erhält man

$$y(0) =$$

Ist dagegen zum Beispiel der Anfangswert $y(3) = 1$ vorgegeben, erhält man

$$y(3) =$$

Überprüfung von Lösungen/Linearität

Beh.: $x = 2$ löst $x^5 - 2x^3 - 16 = 0$.

Beweis ?

Beispiel A)

Beh.: $y_1(t) = e^t$ und $y_2(t) = e^{2t}$ lösen beide die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Nachweis:

Beh.:Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der Dgl. so löst auch
$y(t) = \qquad y_1(t) + \qquad y_2(t)$ die Dgl. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Beweis:

y_1 ist Lösung:

y_2 ist Lösung:

Zuerfüllen: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \Longrightarrow y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) \Longrightarrow y''(t) = y_1''(t) + y_2''(t)$

Dgl.:

Beispiel B)

$y_1(t) = e^t + 1$ und $y_2(t) = e^{2t} + 1$ lösen beide die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2$$

Nachweis: Einsetzen. Löst $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ebenfalls die Dgl. ?

y_1 ist Lösung:

y_2 ist Lösung:

$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \Longrightarrow y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) \Longrightarrow y''(t) = y_1''(t) + y_2''(t)$

$y'' - 3y' + 2y =$

Beispiel C)

$y_1(t)$ und $y_2(t)$ seien zwei nicht identisch verschwindende Lösungen der Differentialgleichung,

$$y'(t) - (y(t))^3 = 0$$

Löst $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ebenfalls die Differentialgleichung?