Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Schmidt

WiSe 2023/24

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

04. März 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = \sin(2t)u(t) + e^{\cos(2t)}(u(t))^3.$$

Hinweis: Bei dieser Differentialgleichung hilft eine Standard-Substitution.

Lösung :

Die Differentialgleichung ist Bernoullisch.

Mit $\alpha = 3$, $a(t) = \sin(2t)$ und $b(t) = e^{\cos(2t)}$ und $y = u^{1-\alpha} = u^{-2}$ erhält man für y die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = (1-\alpha)(a(t)y(t) + b(t)) = -2(\sin(2t)y(t) + e^{\cos(2t)}).$$ **(1 Punkt)**

Variante 1)

Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mittels Separation liefert:

$y_h' = -2\sin(2t)y_h \implies y_h(t) = e^{\int -2\sin(2t)dt} = Ce^{\cos(2t)}$. **(1,5 Punkte)**

Variation der Konstanten

$y_p(t) = C(t)e^{\cos(2t)} \overset{\text{Dgl}}{\longrightarrow} C'(t)e^{\cos(2t)} \overset{!}{=} -2e^{\cos(2t)} \longrightarrow c'(t) = -2.$

Zum Beispiel mit $C(t) = -2t$ erhält man

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (C - 2t)e^{\cos(2t)}$. **(1,5 Punkte)**

Variante 2) Lösungsformel aus Vorlesung 1

$y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C)$

wobei $A'(t) = \hat{a}(t)$, $(B^*(t))' = e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t)$, $C \in \mathbb{R}$. **Ansatz: (1 Punkt)**

$A'(t) = \hat{a}(t) = -2(\sin(2t)$ zum Beispiel $A(t) = \cos(2t)$.

Mit $\hat{b}(t) = -2e^{\cos(2t)}$ rechnen wir

$e^{-A(t)} \cdot \hat{b}(t) = e^{-cos(2t)} \cdot (-2e^{\cos(2t)}) = -2 = (B^*(t))'$.

Zum Beispiel mit $B^*(t) = -2t$ erhält man

$y(t) = y(t) = e^{A(t)}(B^*(t) + C) = e^{\cos(2t)}(-2t + C)$. **(2 Punkte)**

Rücksubstitution: Wegen $y = u^{1-\alpha} = u^{-2}$ erhalten wir

$u(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{y}} = \pm e^{-\frac{\cos(2t)}{2}}(C - 2t)^{-\frac{1}{2}}$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$u'''(t) - 5u''(t) + 2u(t) = 3 + \cos(t)\,, \qquad u(0) = 4,\; u'(0) = 3,\; u''(0) = 0.$$

a) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

b) Handelt es sich um eine explizite Differentialgleichung? Wenn nicht, geben Sie eine äquivalente explizite Differentialgleichung an.

c) Schreiben Sie die Anfangswertaufgabe in eine äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung um.

Lösung:

a) Die Differentialgleichung hat die Ordnung drei. **(1 Punkt)**

b) Nein. Explizite Form:

$$u'''(t) = 5u''(t) - 2u(t)) + 3 + \cos(t). \qquad (\mathbf{1Punkt})$$

c) Mit

$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \end{pmatrix}$$

erhält man als äquivalentes System **(2 Punkte)**

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 + \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}(0) := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

bzw.

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 + \cos(t)) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}(0) := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung

$$u'''(t) + a_2 u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0 \qquad (*)$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können.

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 := \{u_1(t) = -t,\ u_2(t) = 1,\ u_3(t) = 2t\}$.

b) $M_2 := \{u_1(t) = e^{-t},\ u_2(t) = e^{t},\ u_3(t) = e^{2t},\ u_4(t) = e^{3t}\}$.

c) $M_3 := \{u_1(t) = e^{-t},\ u_2(t) = e^{it},\ u_3(t) = e^{2it}\}$.

d) $M_4 := \{u_1(t) = 1,\ u_2(t) = e^{-2it},\ u_3(t) = e^{2it}\}$.

Lösung: (1+1+1+1 Punkte)

Der Lösungsraum hat die Dimension drei.

a) M_1 kann kein Fundamentalsystem sein. Denn es gilt zum Beispiel:
$u_3(t) + 2u_1(t) = 0$. Der durch die Funktionen aus M_1 aufgespannte Raum hat nur die Dimension zwei.

b) Da der Lösungsraum die Dimension drei hat, kann M_2 kein Fundamentalsystem für (1) sein. Der durch die Funktionen aus M_2 aufgespannte Raum hat die Dimension vier.

c) Komplexe Lösungen linearer Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf! Daher kann M_3 kein Fundamentalsystem für (1) sein.

d) M_4 ist ein Fundamentalsystem für $(*)$ mit passenden Koeffizienten.
Nicht von den Studierenden verlangt: Das charakteristische Polynom wäre $P(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 4)$, die Differentialgleichung also $u'''(t) + 4u'(t) = 0$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)\,.$$

a) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0)^T$ des Systems auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

Lösung:

a) Berechnung der Eigenwerte

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 5 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-5-\lambda)+25 = \lambda^2+2\lambda-15+25.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(\lambda+1)^2+9 = 0 \iff (\lambda+1)^2 = -9 \iff \lambda+1 = \pm 3i \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i\,.$$

(2 Punkte)

Die Realteile aller Eigenwerte sind negativ. Der stationäre Punkt ist asymptotisch stabil. **(1 Punkt)**

b) Den Eigenvektor zu $\lambda_1 = -1+3i$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erste Zeile: $(4-3i)z_1 - 5z_2 = 0 \iff z_2 = \frac{(4-3i)z_1}{5}$

Wir können also zum Beispiel $\boldsymbol{z} = \binom{5}{4-3i}$ wählen.

Die zweite Zeile ist dann ebenfalls erfüllt.

Eine komplexe Lösung ist: $\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{(-1+3i)t}\,\boldsymbol{z} = e^{-1t}e^{3it}\,\boldsymbol{z}\,.$ **(2 Punkte)**

Eine reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch

$FM(t) = \left(\boldsymbol{u}^{[1]}(t),\, \boldsymbol{u}^{[2]}(t)\right) = (\,\mathrm{Re}\,(\,\boldsymbol{z}^{[1]}(t))\,,\mathrm{Im}\,(\,\boldsymbol{z}^{[1]}(t))\,)\,.$

Wegen

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{-t}(\cos(3t)+i\cdot\sin(3t))\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 5\cos(3t)+5i\cdot\sin(3t) \\ 4\cos(3t)+4i\cdot\sin(3t)-3i\cos(3t)+3\sin(3t) \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 5\cos(3t) \\ 4\cos(3t)+3\sin(3t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 5\sin(3t) \\ 4\sin(3t)-3\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)