Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Schmidt

SoSe 2024

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

26. August 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1) (3 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(t) \cdot \frac{1}{4y^2(t)}.$$

Lösung

Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung.

$\frac{dy}{dt} = \cos(t) \cdot \frac{1}{4y^2(t)} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} y^2 dy = \frac{\cos(t)}{4} dt.$ **(1 Punkt)**

Und damit

$\int y^2 dy = \int \frac{\cos(t)}{4} dt \Longleftrightarrow \frac{y^3(t)}{3} = \frac{\sin(t)}{4} + \tilde{C}$ **(1 Punkt)**

$\Longleftrightarrow y^3(t) = \frac{3}{4}\sin(t) + 3\tilde{C} = \frac{3}{4}\sin(t) + C$

Also $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\sin(t) + C}.$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 2) (5 Punkte)

a) Welche der folgenden Differentialgleichungen für $u(t)$ sind exakt?

(i) $u + u^3 + 3u^2u' = 0\,.$

(ii) $u^5 + \sin(t) + 5tu^4u' = 0\,.$

(iii) $ut^2 - tu^2u' = 0\,.$

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Bestimmen Sie für eine exakte Differentialgleichung aus Teil a) ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

Lösung:

a) (i) $u + u^3 + 3u^2u' = 0\,.$ Mit $f(t,u) = u + u^3$ und $g(t,u) = 3u^2$ folgt
$f_u = 1 + 3u^2 \neq g_t = 0\,.$
Die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

(ii) $u^5 + \sin(t) + 5tu^4u' = 0\,.$ Hier gilt:
$f_u(t,u) = 5u^4 = g(t,u) = (5tu^4)_t = 5u^4\,.$ Die Differentialgleichung ist exakt.

(iii) $ut^2 - tu^2u' = 0\,.$ Mit $f_u(t,u) = t^2$ und $g_t(t,u) = -u^2$ kann die Bedingung $f_u = g_t$ nur für $t = u = 0$ erfüllt sein.
Die Differentialgleichung ist nicht exakt. **(2,5 Punkte)**

b) Wir bestimmen ein Potential Ψ zur Differentialgleichung aus Teil a)ii).

$u^5 + \sin(t) + 5tu^4u' = 0.$

$f(t,u) = u^5 + \sin(t),\ g(t,u) = 5tu^4\,,$

$\Psi_t(t,u) = u^5 + \sin(t) \implies \Psi(t,u) = u^5t - \cos(t) + c(u) \Rightarrow$

$\Psi_u(t,u) = 5tu^4 + 0 + c'(u) \overset{!}{=} g(t,u) = 5tu^4$

$\implies c'(u) = 0 \iff c(u) = k \iff \Psi(t,u) = u^5t - \cos(t) + k\,.$ **(1,5 Punkte)**

Die Lösungen der Differentialgleichung erfüllen:

$\Psi(t,u) = u^5t - \cos(t) + k = \tilde{K} \iff u^5t - \cos(t) = K\,.$ **(1 Punkt)**

Allgemeine Lösung: $u(t) = \sqrt[5]{\frac{K+\cos(t)}{t}}$ für $t \neq 0\,.$

Aufgabe 3) (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$u'''(t) + 4u''(t) - 5u'(t) = -1 - 5t\,.$$

Lösung:

Charakteristisches Polynom:

$P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 5\,)\,.$ **Ansatz (1 Punkt)**

$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \iff (\lambda+2)^2 - 9 = 0 \iff \lambda \in \{-2-3, -2+3\}\,.$

Die Nullstellen von P sind: $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1\,.$

Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung :

$u_1(t) = e^{-5t},\ u_2(t) = e^0,\ u_3(t) = e^t.$

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung :

$u_h(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 + c_3\, e^t\,.$ **(2 Punkte)**

Für eine partikuläre Lösungen der inhomogenen Gleichung machen wir einen speziellen Ansatz.

Die Inhomogenität ist ein Polynom ersten Grades mal $e^{0\cdot t}$, wobei 0 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Ansatz: $u_p =$ Polynom ersten Grades $\cdot e^{0\cdot t} \cdot t = at + bt^2\,.$ **(1 Punkt)**

ES gilt $u'(t) = a + 2bt,\ u''(t) = 2b,\ u'''(t) = 0\,.$ Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$0 + 4\cdot 2b - 5(a+2bt) = -10bt + 8b - 5a \overset{!}{=} -1 - 5t\,.$

Koeffizientenvergleich liefert $\quad b = \frac{1}{2},\ a = 1\,.$

Damit also $u_p(t) = t + \frac{t^2}{2}\,.$ **(1 Punkt)**

Und damit erhalten wir eine Darstellung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 + c_3\, e^t + t + \frac{t^2}{2}\,.$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 4) (6 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \beta \\ 2 & -\beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u}(t)$$

mit dem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0,0)^T$ des Systems auf Stabilität.

b) Es sei jetzt $\beta = 0$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

Lösungsskizze:

a) Berechnung der Eigenwerte

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \beta \\ 2 & \beta & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \beta \\ -\beta & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = (-1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 + \beta^2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{-\beta^2} = 1 \pm i\beta.$$

Es gibt (mindestens) einen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Nulllösung ist instabil. **(2,5 Punkte)**

b) $\beta = 0$. Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_1 = -1$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_2 = -\frac{1}{2}v_1,\ v_3 = -v_1.$$

Zum Beispiel $v^{[1]} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}^{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = 0.$$

Zum Beispiel $v^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $\boldsymbol{u}^{[2]}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^{[3]}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die allgemeine Lösung ist:

$\boldsymbol{u}(t) = c_1\, \boldsymbol{u}^{[1]}(t) + c_2\, \boldsymbol{u}^{[2]}(t) + c_3\, \boldsymbol{u}^{[3]}(t) \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$ **(3,5 Punkte)**