Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Präsenzübung

Aufgabe 1: Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$y'' + 2\,y' + y = h(x) \qquad x \in]0,1[$$

$$y(0) - y\,(1) = \gamma_1$$

$$\alpha y'(0) + 2y\,(1) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1,\, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 2:

a) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0)^T$ des linearen Systems $\dot{\boldsymbol{y}} = A\,\boldsymbol{y}$ auf Stabilität.

i) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, **ii)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, **iv)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Für welche der folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}$ können Sie ohne Kenntnis der Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ einen stabilen stationären Punkt (Gleichgewichtspunkt) des Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}}\,(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}\,(t)$ ausschließen?

i) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$, **ii)** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$, **iii)** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:

Die Van-der-Pol-Gleichung

$$\ddot{x} - \epsilon\,(1 - x^2)\,\dot{x} + x = 0 \qquad \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

beschreibt das Verhalten eines Van-der-Pol-Oszillators. Es handelt sich um einen Oszillator mit nichtlinearer Dämpfung und Selbsterregung. Für kleine Auslenkungen x ist die Dämpfung negativ, und für große Auslenkungen ist die Dämpfung positiv. Es gibt keine geschlossene Lösung. Untersuchen Sie die Gleichgewichtslösung $x = 0$ auf Stabilität.

Tipp: Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein äquivalentes System um.

Bearbeitungstermine: 23.01.-27.01.2023