

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzübung

Zur Verkürzung der Schreibweise verwenden wir das Doetsch-Symbol:

$$F(s) := L[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \iff f \circ \bullet F$$

Folgende Korrespondenzen bzw. Zusammenhänge für $\operatorname{Re}(s) > \gamma$, die entweder in der Vorlesung bewiesen wurden oder völlig analog zum Vorgehen in der Vorlesung bewiesen werden können, dürfen benutzt werden. Es gelte stets $f(t) = 0, \forall t < 0$.

$f(t), t \geq 0$	F	γ
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as} \frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(a)$
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0

Wobei $h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a \geq 0, \\ 0 & t < a. \end{cases}$

Falls $f \circ \bullet F$, dann gelten folgende Verschiebungssätze.

I) $h_a(t)f(t-a) \circ \bullet e^{-sa}F(s)$ Verschiebung im Originalraum
 Mult. mit exp-Fkt im Bildraum

II) $e^{at}f(t) \circ \bullet F(s-a)$ Verschiebung im
 $a \in \mathbb{C}$ Bildraum/ Mult. mit
 exp-Fkt im Originalraum

Aufgabe 1:

- a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + y = \sin(4t) + 2te^{-t}, \text{ für } t > 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

Bitte belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

Berechnen Sie die Lösung der algebraischen Gleichung.

- b) Es sei
- $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$
- die Laplace-transformierte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: t \mapsto f(t).$$

Bestimmen Sie $f(t)$.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplace Transformation.

a) $y'' + 9y = h_1(t) - h_2(t) \quad y(0) = y'(0) = 0$

- b) (Nur für die ganz schnellen Studierenden)

$$y'' + y = e^{-t} \sin(2t), \quad y(0) = \alpha, y'(0) = \beta.$$

Bearbeitungstermine: 09.01.-13.01.2023