Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$x^2y''(x) - 2x^2y'(x) + (x^2-2)y(x) \;=\; 0\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass mit y auch jedes Vielfache von y eine Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Machen Sie zur Berechnung einer Lösung einen Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

a) Stellen Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten a_k auf.

b) Zeigen Sie, dass bei einer zusätzlichen Bedingung $a_2 = 1$

$$a_k = \frac{1}{(k-2)!} \qquad \forall k \geq 2$$

gilt. Welche Funktion stellt die Reihe dar?

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) \,+\, y(t) \;=\; b(t), \qquad b(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin(t) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

(i) Skizzieren Sie $(t, b(t))$ füt $t \in [-2, 4]$ und erklären Sie warum folgende Gleichung für alle $t \geq 0$ gilt.

$$b(t) = \sin(t) \,-\, h_{\frac{\pi}{2}}(t)\,\cos(t - \frac{\pi}{2}) \,+\, h_{\frac{\pi}{2}}(t)\,. \tag{2}$$

(ii) Bestimmen Sie die Laplace Transformierte von b, indem Sie

1. direkt die Definition verwenden

$$B(s) := L\,[b(t)] := \int_0^\infty e^{-st} b(t) dt\,.$$

Hinweis: $\displaystyle\int e^{\alpha t} \cdot \sin(t)\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+1}\,(\alpha \cdot \sin(t) - \cos(t)) + C\,.$

2. indem Sie (2) und die Tabellen bzw. Rechenregeln für die Laplace Transformation verwenden.

(iii) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe (1) mit Hilfe der Laplace Transformation.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace Transformation

$$\begin{aligned} u'' - 2(v-u) &= 1 \qquad & u(0) = v(0) = 0 \\ v'' + 2(v-u) &= 0 \qquad & u'(0) = v'(0) = 1. \end{aligned}$$

Abgabe bis 13.01.2023