Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzübung

Aufgabe1:

Gegeben ist die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + a_1\,x\,y'(x) + a_0\,y(x) = 0, \qquad (*)$$

mit reellen Koeffizienten a_k und $x > 0$.

a) Seien y_- und y_+ zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung $(*)$. Zeigen Sie, dass dann auch jede reelle oder komplexe Linearkombination von y_- und y_+ die Differentialgleichung $(*)$ löst.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^r$ jeweils zwei reelle linear unabhängige Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

i) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$, **ii)** $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$.

Für den Fall, dass Sie komplexe Lösungen erhalten, beachten Sie, dass nach Teil a) Real- und Imaginärteile der komplexen Lösung selbst Lösungen der Differentialgleichung sind.

Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Substitution $u(t) := \dot{y}(t)$ und anschließender Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\ddot{y}(t)\,\sin(t) = \cos(t)\dot{y}(t) + \cos(t)\,.$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung davon, dass Sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung gefunden haben.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung aus Teil a).

(i) Ermitteln Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten

$$y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}, \qquad \dot{y}(\frac{\pi}{6}) = -1\,.$$

(ii) Seien nun die Anfangswerte

$$y(0) = 0\,, \qquad \dot{y}(0) = 0\,,$$

bzw.

$$y(0) = 0\,, \qquad \dot{y}(0) = -1\,.$$

vorgegeben. Können Sie eine eindeutige Lösung angeben? Wie vertragen sich Ihre Ergebnisse mit dem Existenz– und Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung?

Bearbeitungstermine: 14.11.-18.11.2022