Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie eine Lösung $y:\ [0,1[\to\mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$\ddot{y}(t) \;=\; \dot{y}(t)\,(y(t)+1), \qquad y(0)=1, \quad \dot{y}(0)=2\,\cdot$$

b) Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen $u=u(r)$, $r \;=\; \sqrt{x^2+y^2}$ der folgenden Poissongleichung im $\mathbb{R}^2$

$$\Delta\,u \;=\; 1$$

Hinweis: In der Vorlesung Analysis III wurde die Darstellung des Laplace Operators in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

hergeleitet. Radialsymmetrisch bedeutet unabhängig vom Winkel ϕ.

c) Gesucht ist die stationäre (d.h. zeitunabhängige)und radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kreisscheibe mit Innenradius $r_i=1$, Außenradius $r_a=2$, Innentemperatur $T_i=20$ und Außentemperatur $T_a=15$.

Bestimmen Sie dazu eine Lösung von $\Delta\,T(x,y) \;=\; 0$

mit
$T(x,y) \;=\; 20$ für $\sqrt{x^2+y^2}=1$ und $T(x,y) \;=\; 15$ für $\sqrt{x^2+y^2}=2$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' + 3y + y^{\frac{3}{4}} = 0, \qquad y(0)=1$$

b) Zeigen Sie, dass die Lösung im Intervall $\left[0,\frac{4}{3}\ln(4)\right]$ eindeutig ist.

c) Geben Sie eine zweite Lösung auf einem Intervall $[0,L]$ mit $L>\frac{4}{3}\ln(4)$ an.

Abgabe bis: 18.11.2022