Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Behrens **WiSe 2022/23**

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)
06. März 2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum$ =

Aufgabe 1) (3 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben

a)
$$y'(x) \; = \; \frac{1+\cos(x)}{(y(x))^2} \qquad \text{für } x > 0, \qquad y(0) = \; 3.$$

b)
$$x^2y''(x) \; - \; xy'(x) - \; 8y(x) \; = \; 0 \qquad \text{für } x > 1, \qquad y(1) = \; 0, \; y'(1) = \; 6.$$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung.Für $y \neq 0$ rechnet man $\frac{dy}{dx} \; = \; \frac{1+\cos(x)}{y^2} \iff y^2dy = \; (1+\cos(x))dx.$ **(1 Punkt)**
Und damit
$\int y^2dy = \; \int(1+\cos(x))dx \iff \frac{y^3}{3} \; = \; x + \sin(x) + C$

$\iff y(x) = \; \sqrt[3]{3x + 3\sin(x) + 3C}.$ **(1 Punkt)**

$y(0) = \; \sqrt[3]{0 + 3\sin(0) + 3C} \overset{!}{=} 3 \iff C = 9\,.$ **(1 Punkt)**

Also $y(x) = \; \sqrt[3]{3x + 3\sin(x) + 27}\,.$

b) Es handelt sich um eine Eulersche Differentialgleichung. Mit dem Ansatz $y(x) \; = \; x^r$ erhält man

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} \; - \; x \cdot rx^{r-1} \; - 8x^r \; = \; x^r \cdot (r^2 - 2r - 8) \overset{!}{=} 0 \qquad \textbf{(1Punkt)}.$$

Also für $x > 0$:

$$r^2 - 2r - 8 \overset{!}{=} 0 \iff (r-1)^2 - 9 \overset{!}{=} 0 \iff r - 1 = \pm\sqrt{9} \iff r = -2 \vee r = 4.$$

Die allgemeine Lösung lautet: $y(x) = \; c_1x^{-2} + \; c_2x^4\,.$ **(2 Punkte)**

Aus $y(1) = c_1 + \; c_2 \overset{!}{=} 0$ erhält man $c_1 = -c_2\,.$
Mit $y'(x) = -2c_1x^{-3} + \; 4c_2x^3$ liefert die zweite Anfangsbedingung dann
$y'(1) = -2c_1 + \; 4c_2 \; = \; 6c_2 \overset{!}{=} 6 \iff c_2 = -c_1 = 1$ **(2 Punkte)**
und
$y(x) \; = \; x^4 - x^{-2}\,.$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t)\,.$$

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem und eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystems.

Lösung 2:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 9.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$\lambda^2 = -9 \iff \lambda = \pm 3i\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Den Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3i$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor mit $z_2 = -iz_1$ erfüllt das System. Wir können also zum Beispiel $(1,-i)^T$ wählen. Der konjugiert komplexe Vektor ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -3i$.

Damit erhalten wir das komplexe Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{3it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(t) = e^{-3it}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch

$$\boldsymbol{Y}(t) := \left(\boldsymbol{y}^{[1]}(t),\, \boldsymbol{y}^{[2]}(t)\right) = (\,\mathrm{Re}\,(\,\boldsymbol{u}(t))\,, \mathrm{Im}\,(\,\boldsymbol{u}(t))\,). \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Wegen $\boldsymbol{u}(t) = (\cos(3t) + i\cdot\sin(3t))\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3t) + i\cdot\sin(3t) \\ -i\cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix}$

erhält man

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

und die allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\,\boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\,\boldsymbol{y}^{[2]}(t)\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)}(t) + a_3 y^{'''}(t) + a_2 y^{''}(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 := \{y_1(t) = e^t,\, y_2(t) = e^{5t},\, y_3(t) = e^{9t}\}$.

b) $M_2 := \{y_1(t) = e^t,\, y_2(t) = e^{it},\, y_3(t) = e^{2t},\, y_4(t) = e^{2it}\}$.

c) $M_3 := \{y_1(t) = 1,\, y_2(t) = t,\, y_3(t) = e^{2t},\, y_4(t) = e^{-2t}\}$.

d) $M_4 := \{y_1(t) = e^t,\, y_2(t) = \sin(2t),\, y_3(t) = e^{-2it},\, y_4(t) = e^{2it}\}$.

Lösung: (1+1+1+2 Punkte)

a) Da der Lösungsraum die Dimension vier hat, kann M_1 kein Fundamentalsystem für (1) sein.

b) Komplexe Lösungen linearer Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf! Daher kann M_2 kein Fundamentalsystem für (1) sein.

c) M_3 ist ein Fundamentalsystem für (1) mit passenden Koeffizienten.

   Nicht von den Studierenden verlangt: Das charakteristische Polynom wäre $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$, die Differentialgleichung also $y^{''''}(t) - 4y^{''}(t) = 0$.

d) M_4 kann kein Fundamentalsystem sein. Denn es gilt zum Beispiel:

   $e^{2it} - e^{-2it} = 2i\sin(2t)$. Der durch die Funktionen aus M_4 aufgespannte Raum hat nur die Dimension drei.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Entscheiden Sie ohne Kenntnis der Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$, für jede der folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}_k, k = 1, 2, 3$, ob die Nulllösung ein stabiler oder ein instabiler stationärer Punkt (Gleichgewichtspunkt) des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}(t)$ ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

i) $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, **ii)** $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **iii)** $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: (1+1+2 Punkte)

Die Matrix $\boldsymbol{A}_1$ hat den einfachen Eigenwert Null und den doppelten Eigenwert -2. Die Gleichgewichtspunkte sind stabil.

Die Matrix $\boldsymbol{A}_2$ hat unter anderem den Eigenwert 1. Alle Gleichgewichtspunkte sind instabil.

Die Matrix $\boldsymbol{A}_3$ hat das charakteristische Polynom

$P(\lambda) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 + \gamma^2)$

und somit die Eigenwerte $-1, -i\gamma, i\gamma$.

Für $\gamma \neq 0$ gibt es keinen Eigenwert mit positivem Realteil.Die Eigenwerte mit Realteil Null sind einfach. Alle Gleichgewichtspunkte sind stabil.

Für $\gamma = 0$ gibt es keinen Eigenwert mit positivem Realteil. Der Eigenwert $\lambda = 0$ ist algebraisch doppelt. Zur Prüfung der geometrischen Vielfachheit rechnet man

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

und erhält zum Beispiel mit die Eigenvektoren $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$. Die geometrische und die algebraische Vielfachheit des Eigewerts mit Realteil Null stimmen überein. Die stationären Punkte sind also stabil.