Fachbereich Mathematik **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. J. Behrens

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)
06. März 2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1) (3 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben

a)
$$y'(x) = \frac{1+\cos(x)}{(y(x))^2} \qquad \text{für } x > 0, \qquad y(0) = 3.$$

b)
$$x^2y''(x) - xy'(x) - 8y(x) = 0 \qquad \text{für } x > 1, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 6.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t)\,.$$

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem und eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)}(t) + a_3 y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $M_1 := \{y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = e^{5t},\ y_3(t) = e^{9t}\}$.

b) $M_2 := \{y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = e^{it},\ y_3(t) = e^{2t},\ y_4(t) = e^{2it}\}$.

c) $M_3 := \{y_1(t) = 1,\ y_2(t) = t,\ y_3(t) = e^{2t},\ y_4(t) = e^{-2t}\}$.

d) $M_4 := \{y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = \sin(2t),\ y_3(t) = e^{-2it},\ y_4(t) = e^{2it}\}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Entscheiden Sie ohne Kenntnis der Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$, für jede der folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}_k, k = 1, 2, 3$, ob die Nulllösung ein stabiler oder ein instabiler stationärer Punkt (Gleichgewichtspunkt) des Differentialgleichungssystems
$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}(t)$ ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

i) $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, **ii)** $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **iii)** $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$.