Differentialgleichungen I

Woche 13 / J. Behrens

① Fehlerbetrachtung:

• Erinnerung: Verwende die allgemeine (implizite) Form der Rechenvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h).$$

Definition: (lokaler Diskretisierungsfehler)
Der lokale Diskretisierungsfehler an der Stelle x_{k+1} ist definiert als

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h).$$

Definition: (globaler Diskretisierungsfehler)
Der globale Diskretisierungsfehler an der Stelle x_k ist definiert als

$$g_k := y(x_k) - y_k.$$

• Lipschitz-Bedingungen:

Um Fehler abschätzen zu können, muss Φ Bedingungen erfüllen:

$$|\Phi(x,y,z,h) - \Phi(x,y^*,z,h)| \leq L\,|y-y^*|$$

$$|\Phi(x,y,z,h) - \Phi(x,y,z^*,h)| \leq L\,|z-z^*|$$

mit $(x,y,z,h), (x,y^*,z,h), (x,y,z^*,h)$ beliebige Punkte im Bereich B

$0 < L < \infty$ Lipschitz-Konstante.

• Bem: Falls Φ in B stetig ist und partielle Ableitungen Φ_y, Φ_z besitzt, die auch stetig und beschränkt sind mit $|\Phi_y(x,y,z,h)| < M$ und $|\Phi_z(x,y,z,h)| < M$, so ist Φ Lipschitz-stetig (erfüllt obige Bedingungen) mit $L = M$.

- lokaler Diskr.-Fehler: $y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) + d_{k+1}$
- globaler Fehler: Subtrahiere die Rechenvorschrift: $g_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$

$$\Rightarrow g_{k+1} = \underbrace{y(x_k) - y_k}_{g_k} + h\left[\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)\right] + d_{k+1}$$

$$= g_k + h\left[\underbrace{\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h)} + \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)\right] + d_{k+1}$$

$$|g_{k+1}| \leq |g_k| + h\left[L\,|y(x_k) - y_k| + L\,|y(x_{k+1}) - y_{k+1}|\right] + |d_{k+1}|$$

$$= (1+hL)\,|g_k| + hL\,|g_{k+1}| + d_{k+1} \qquad \circledast$$

Mit $hL < 1$:

$$|g_{k+1}| \leq \frac{1+hL}{1-hL}\,|g_k| + \frac{|d_{k+1}|}{1-hL}$$

- Zu jedem $h > 0$ ex. $K > 0$ Konstant: $\dfrac{1+hL}{1-hL} = 1 + hK$
- Explizites Einschrittverfahren: (Φ ist unabh. von y_{k+1} bzw. $y(x_{k+1})$): $hL|g_{k+1}|$ in $\circledast$ entfällt.

$$\Rightarrow |g_{k+1}| \leq (1+hL)\,|g_{k+1}| + |d_{k+1}|$$

- Mit $\max_k |d_k| < D$ und geeignet gewählten Konstanten a, b:

$$\Rightarrow |g_{k+1}| \leq (1+a)|g_k| + b$$

Daraus folgt dann der Satz im Video.