# Differentialgleichungen I

Woche 12 / J. Behrens

## ① Beispiel Autonomes System: Räuber-Beute-Modell

- Modell: Sei $x$ # Beutetiere
  $y$ # Räuber / Jäger

- Wachstum der Beutetiere kann als exponentiell angenommen werden

$$x = x_0 e^{ax}$$

Dies ist Lösung einer DGL: $\dot{x} = ax$

- Das Zusammentreffen von Räubern und Beutetieren ist proportional zu $x \cdot y$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = ax - b \cdot x \cdot y} \quad \text{Beutegleichung}$$

- Räuber sterben, wenn es keine Beute gibt

$$\dot{y} = -dy$$

Andererseits wächst die Population der Räuber proportional zum Zusammentreffen mit Beutetieren $x \cdot y$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y} = c \cdot x \cdot y - dy} \quad \text{Räubergleichung}$$

- Stationärer Zustand: Falls sich die Zahl der Räuber und der Beutetiere nicht ändert (zeitlich), gilt: $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = 0$

$$0 = ax - bxy, \qquad 0 = cxy - dy$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{d}{c} \qquad \bar{y} = \frac{a}{b}$$

• Nichtstationäre Zustände:

Ansatz: $\frac{d}{x} \cdot \dot{x} + \frac{a}{y} \cdot \dot{y} = \cancel{ad} - bdy + acx - \cancel{ad}$

$$= acx - cbxy + cbxy - ddy$$

$$= c(ax - bxy) + b(cxy - dy)$$

$$= c\dot{x} + b\dot{y}$$

• Integration: $d \ln x + a \ln y - c - b \overset{!}{=} \text{const.}$

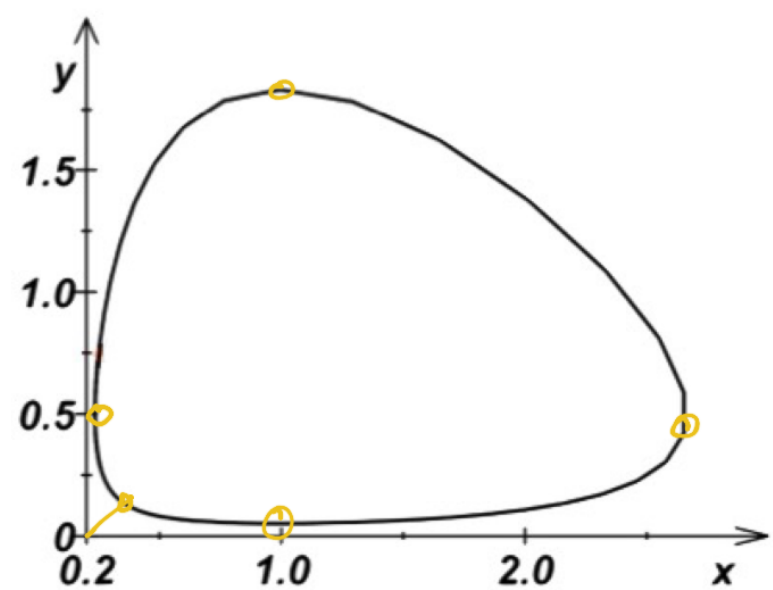
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(d \ln x - a \ln y - c - b)}_{=: E(x,y)} = 0$$

• $E(x,y)$, wie gerade definiert, ist auf jeder Lösungskurve konstant.

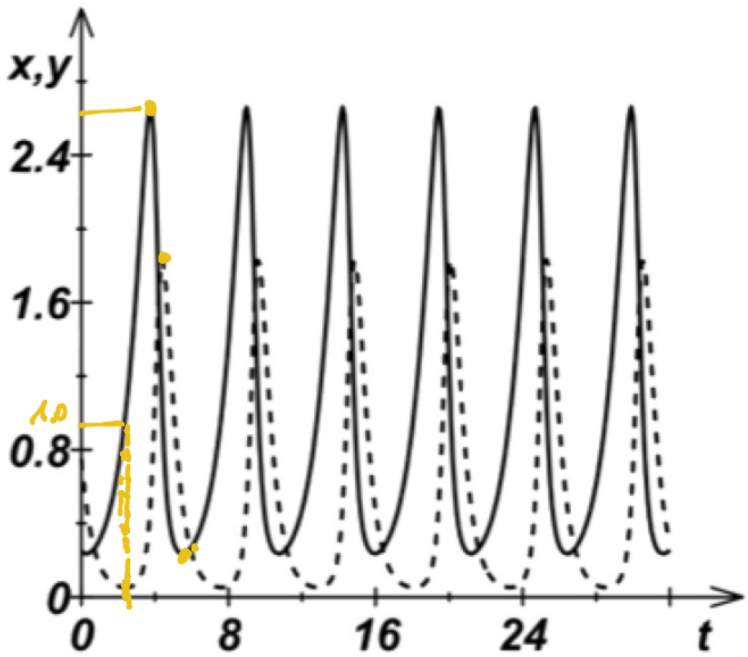
Erhaltungsgröße des Systems

• Jede Lösung verläuft auf einer Niveaulinie von $E$.

• Für $a = 1$, $b = c = d = 2$, $(x_0, y_0) = (0{,}25; 0{,}75)$ ergibt sich



• Das zeitlich-periodische Verhalten der beiden Populationen:




② Lineares autonomes System $n=2$: $\quad A x = \dot{x}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

• 4 Konstellationen für die Eigenwerte (EW) von $A$, $\lambda_1, \lambda_2$

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit Eigenvektoren (EV) $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t)\, \vec{e}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t)\, \vec{e}_2$$

b) $\lambda$ hat algebraische und geom. Vielfachheit 2, $\vec{e}_1 \neq \vec{e}_2$ EV:

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \exp(\lambda t)\vec{e}_1 + c_2 \exp(\lambda t)\vec{e}_2 .$$

c) $\lambda$ hat algebraische Vielfachheit 2 aber geom. Vielfachheit 1, $\vec{e}_1$ EV, $\vec{e}_2$ Hauptvektor

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \exp(\lambda t)\vec{e}_1 + c_2 t \exp(\lambda t)\vec{e}_2$$

d) $\lambda_1 = a + ib \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ mit $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$:

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \exp(at) \exp(ibt)\, \vec{e}_1 + c_2 \exp(at) \exp(-ibt)\, \vec{e}_2$$

- Schätze den Abstand einer Lösung $\vec{x}(t)$ zu $\vec{x}_0 = \vec{0}$ ab:

a), b) $$|\vec{x}(t) - \vec{x}_0|^2 = |c_1 \exp(\lambda_1 t)\vec{e}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t)\vec{e}_2|^2$$

$$= \left(\exp(\lambda_1 t) c_1 e_{11} + \exp(\lambda_2 t) c_2 e_{22}\right)^2 + \left(\exp(\lambda_1 t) c_1 e_{12} + \exp(\lambda_2 t) c_2 e_{21}\right)^2$$

$\Rightarrow |\vec{x}(t) - \vec{x}_0| \to 0$ für $t \to \infty$ falls $\lambda_i < 0$ $(i = 1, 2)$

$\to \infty$ für $t \to \infty$ falls $\lambda_1 > 0$ oder $\lambda_2 > 0$

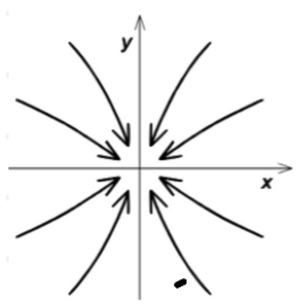
c) $|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| \to 0$ falls $\lambda < 0$

$\to \infty$ falls $\lambda \geq 0$

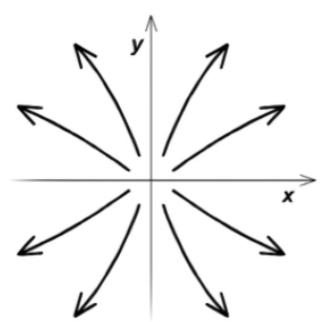
d) $|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| \to 0$ falls $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = a < 0$

$\to \infty$ sonst

- Phasenportraits:

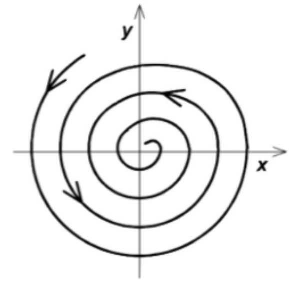



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$




$\lambda_1, \lambda_2 > 0$


$\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$




$\lambda = a + ib, \quad a < 0$